KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriteier till kompletteringstentamen 2010-11-15

Uppgift.

(1) Planet W som ges av ekvationen $2x - y + 3z = 0$ är ett tvådimensionellt delrum av $\mathbb{R}^3$.

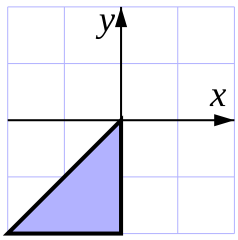
(a) Bestäm en bas B för W. **(2)**

(b) Bestäm koordinaterna för vektorn $(1, -1, -1)$ med avseende på basen B. **(2)**

(2) Låt T vara den linjära avbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som är sammansättningen av en rotation med en vinkel $\pi/2$ i positiv led, dvs moturs, följd av en spegling i linjen $x = -y$.

(a) Bestäm standardmatrisen för T genom att se hur T verkar på standardbasvektorerna i $\mathbf{R}^2$. **(3)**

(b) Illustrera hur T verkar på planet genom att rita upp bilden av området Ω som ges i figuren nedan. **(1)**



FIGUR 1. Området Ω

(3) Avgör vilka sex av de åtta vektorerna

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\quad \mathbf{u}_2 = (-1,1,1),\quad \mathbf{u}_3 = (1,-1,1),\quad \mathbf{u}_4 = (-1,-1,1),$$
$$\mathbf{u}_5 = (1,1,-1),\quad \mathbf{u}_6 = (-1,1,-1),\quad \mathbf{u}_7 = (1,-1,-1),\quad \mathbf{u}_8 = (-1,-1,-1)$$

som är egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

och bestäm deras motsvarande egenvärden. **(4)**

Lösningsförslag.

(1) (a) Vi kan se ekvationen för planet som ett ekvationssystem med en linjär ekvationen. Totalmatrisen för systemet är då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

och Gausseliminationen är i stort sett färdig. Genom att dela första raden med 2 får vi matrisen på reducerad trappstegsform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

och vi kan läsa av lösningen direkt efter att ha infört reella parametrar s och t för de båda fria variablerna. Vi får lösningarna som

$$(x, y, z) = (\frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t, s, t) = s \cdot (\frac{1}{2}, 1, 0) + t \cdot (-\frac{3}{2}, 0, 1).$$

Därmed utgör de båda vektorerna $\mathbf{f}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$ och $\mathbf{f}_2 = (\frac{3}{2}, 0, 1)$ en bas för W.

(b) För att hitta koordinaterna för $(1, -1, -1)$ med avseende på basen B söker vi skalärer s och t så att

$$(1, -1, -1) = s \cdot (\frac{1}{2}, 1, 0) + t \cdot (-\frac{3}{2}, 0, 1).$$

Detta kan formuleras som ett linjärt ekvationssystem med två obekanta, s och t, och tre ekvationer, en för varje position.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s & - & \frac{3}{2}t & = & 1 \\ s & & & = & -1 \\ & & t & = & -1 \end{cases}$$

Vi kan läsa av lösningen $(s, t) = (-1, -1)$ från de sista två ekvationerna och konstaterar att denna lösning också stämmer med den första ekvationen. Allstå är koordinaterna för vektorn $(1, -1, -1)$ lika med $(-1, -1)$ relativt basen B.

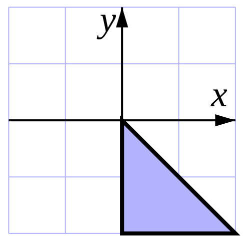
(2) (a) Kolonnerna i standardmatrisen för T ges av bilderna av standardbasvektorerna under avbildningen. Vi följer vad som händer för dessa två vektorer. Vi börjar med $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ och får efter rotationen med $\pi/2$ moturs vektorn $(0, 1) = \mathbf{e}_2$. Denna vektor speglas nu i linjen $x = -y$ och bilden blir $(-1, 0) = -\mathbf{e}_1$.
På motsvarande sätt får vi för vektorn $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ efter rotationen vektorn $(-1, 0) = -\mathbf{e}_1$. När denna vektor speglas i linjen $x = -y$ får vi $(0, 1) = \mathbf{e}_2$.
Sammantaget har vi att $T(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1$ och $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ och standardmatrisen för avbildningen blir därmed

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(-2, -2)$ och $(0, -2)$ kommer att avbildas på en triangel med hörn i punkterna $T(0, 0) = (0, 0)$,

$$T(-2, -2) = T(-2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = -2T(\mathbf{e}_1) - 2T(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2 = (2, -2)$$

och $T(0, -2) = -2T(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_2 = (0, -2)$.



FIGUR 2. Bilden av området Ω under avbildningen T.

(3) Vi ser först av $\mathbf{u}_8 = -\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_7 = -\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_6 = -\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_5 = -\mathbf{u}_4$. Därmed räcker det att kolla de fyra första vektorerna.

Vi kontrollerar om de är egenvektorer genom att multiplicera dem med A från vänster och får

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1-2 \\ 1+3-2 \\ -1-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket visar att $\mathbf{u}_1$, och därmed också $\mathbf{u}_8 = -\mathbf{u}_1$, är egenvektorer med egenvärde 2.

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-1-2 \\ -1+3-2 \\ 1-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vilket inte är en multipel av $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 1)$. Alltså är $\mathbf{u}_2$ och inte heller $\mathbf{u}_7 = -\mathbf{u}_2$ egenvektorer till A.

$$A\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1-2 \\ 1-3-2 \\ -1+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket visar att $\mathbf{u}_3$, och därmed också $\mathbf{u}_6 = -\mathbf{u}_3$, är egenvektorer med egenvärde 4.

Slutligen får vi

$$A\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1-2 \\ -1-3-2 \\ 1+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vilket visar att $\mathbf{u}_4$, och därmed också $\mathbf{u}_5 = -\mathbf{u}_4$, är egenvektorer med egenvärde 6.

Svar:

(1) (a) $B = \{(\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{3}{2}, 0, 1)\}$ är en bas för W.
(b) Koordinaterna för $(1, -1, -1)$ relativt basen B är $(-1, -1)$.

(2) Standardmatrisen för avbildningen T är $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(3) $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_8$ är egenvektorer med egenvärde 2, $\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_6$ är egenvektorer med egenvärde 4, och $\mathbf{u}_4$ och $\mathbf{u}_5$ är egenvektorer med egenvärde 6.

Bedömningskriterier.

(1)
- Korrekt metod för att bestämma en basvektor till W, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av en bas B för W, **1 poäng**.

(2)
- Korrekt uppställning för att ta reda på koordinaterna för vektorn med avseende på basen B, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av koordinaterna för vektorn, **1 poäng**.

(3)
- Korrekt princip för hur standardmatrisen beräknas med hjälp av bilderna av standardbasvektorerna, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av bilden av en av standardbasvektorerna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av bilderna och korrekt motiverad slutsats om standardmartisen för T, **1 poäng**.
  (a) Korrekt illustration av hur avbildningen verkar på planet, **1 poäng**.

(4)
- Korrekt idé om vad en egenvektor är, **1 poäng**.
- Korrekt kontroll av om första vektorn är en egenvektor och beräkning av dess egenvärde, **1 poäng**.
- Korrekt kontroll av ytterligare två vektorer och deras egenvärden, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd kontroll och slutsats om resterande egenvektorer och deras egenvärden, **1 poäng**.

Bedömning av presentationen. Presentationen av lösningen av varje uppgift bedöms enligt följande:
- För full poäng (4) krävs bra förklarande text till alla formler och beräkningar.
- Om förklarande text saknas helt ges högst två poäng på uppgiften.