1. Lösningsmängden till homogena ekvationssystem

I denna första föreläsning börjar vi med att repetera det grunnläggande begreppet inom linjär algebran. Linjär algebra är studiet av lösningsmängden till linjära ekvationssystem. Punkt.

1.1. **Euklidiska rummet.** Med symbolen $\mathbf{R}^n$ menar vi mängden av alla $(n \times 1)$-matriser,

$$\mathbf{R}^n = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid \text{reella tal } x_i, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Mängden $\mathbf{R}^n$ kallas det Euklidiska n-rummet, och element i $\mathbf{R}^n$ kallas punkt, vektorer, och i vissa fall med deras egentliga namn, $(n \times 1)$-matriser.

1.2. **Linjära ekvationssystem.** Linjär algebran handlar i sin enkelhet om lösningsmängden till linjära ekvationssystem. Ett exempel på ett linjärt ekvationssystem är

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z &= 1 \\ x + y &= 2 \\ 2x + z &= 3. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Här har vi tre okända x, y och z, och vi ger dessa okända den naturliga ordningen $x_1 = x, x_2 = y$ och $x_3 = z$. Att en punkt $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$ satisfierar ekvationssystemet 1.2.1 betyder att

$$\begin{aligned} 3t_1 + 2t_2 + 2t_3 &= 1 \\ t_1 + t_2 &= 2 \\ 2t_2 + t_3 &= 3 \end{aligned}$$

1.3. **Lösningsmängd.** Lösningsmängden $W(1)$ till ekvationssystemet 1.2.1 är en delmängd av $\mathbf{R}^3$, och ges som

$$W(1) = \{ \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \mid \text{ som satisfierar 1.2.1}\} \subseteq \mathbf{R}^3.$$

1.4. **Gauss-Jordan elimination.** Det finns ett enkelt och mekanisk sätt att lösa linjära ekvationssystem. Detta måste man behärska. Lösningsmetoden kallas Gauss-Jordan elimination. Vi börjar med att förenkla notationen, och skriver ekvationssystemet 1.2.1 som matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Sedan gäller det att använda de tre elementära radoperationerna att skaffa ledande ettor. Vi byter plats på rad 1 och rad 2 i matrisen. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Vi har nu en ledande etta i position $(1,1)$. Vi vill ha noll över och under denna etta. Vi multiplicerar rad 1 med talet -3, och adderar till rad 2. Sedan tar vi och multiplicerar rad 1 med talet -2, och adderar till rad 3. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & -5 \\ 0 & -2 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Vi är nu klarar med kolumn 1. I kolumn två får vi en ledande etta i position $(2,2)$ om vi multiplicerar rad 2 med talet -1. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & -2 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Vi tar nu, för att få nollor över och under denna nya ledande ettta, och multiplicerar rad två med talet -1, och adderar till rad 1. Sedan tar vi och multiplicerar rad två med talet 2, och adderar til rad tre. Detta ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 5 \\ 0 & 0 & -3 & | & 9 \end{bmatrix}$$

Vi multiplicerar den tredje raden med $-\frac{1}{3}$, och har då en ledanden etta i position $(3,3)$. Vi multiplicerar den (nya) tredje raden med talet 2 och adderar till rad två. Sedan tar vi och multiplicerar den tredje raden med talet -2, och adderar till rad ett. Detta ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Den senaste matrisen korresponderar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 0 + 0 & = 3 \\ 0 + y + 0 & = -1 \\ 0 + 0 + z & = -3 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Vilket är ett *annat* ekvationssystem än vad vi ursprungligen 1.2.1 började med. Men, Gauss-Jordan eliminationen ändrar ekvationssystemet, men inte lösningsmängden. Lösningsmängden $W(2)$ till ekvationssystemet 1.4.1 är precis den samma som lösningsmängden $W(1)$ till ekvationssystemet 1.2.1. Lösningsmängden till det senare ekvationssystemet kan vi lätt läsa ut, vi har

$$W(1) = W(2) = \{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \}.$$

Lösningsmängden består i detta exemplet av en enda punkt.

1.5. **Homogena ekvationssystem.** Inte bara kan vi lösa ut linjära ekvationssystem, men vi kommer vidare att fokusera på specialfall av linjära ekvationssystem, såkallade *homogena ekvationssystem*. Ett exempel på ett homogent ekvationssystem är

$$\left\{ \begin{array}{ll} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 5x_5 & = 0 \end{array} \right. \tag{1.5.1}$$

I detta exemplet har vi tre ekvationer i fem okända $x_1, \ldots, x_5$. Lösningsmängden $W(3)$ till ekvationssystemet 1.5.1 är en delmängd av $\mathbf{R}^5$. Notera nu att matrisen vi sätter upp för ekvationssystemet är

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Den sista kolumnen, kolumnen till höger för det stiplade sträcket är inte med. Denna kolumn består enbart av nollor, och de elementära radoperationerna kommer inte att ändra på detta. Det är dock viktigt att man är klar över att den sista kolumnen är osynlig. Tycker man att detta är förvirrande, så tar man med denna kolumn i sina beräkningar. Oansätt hur man gör, Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.5.2}$$

Här skriver vi inte upp rader som enbart består av nollor. Denna matris svarar till ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + \frac{5}{6}x_3 - \frac{2}{3}x_5 & = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 + x_5 & = 0 \end{array} \right.$$

Vi märker oss att vi enbart har två ledande ettor i den reducerade trappstegsformen 1.5.2. Detta betyder att vi kan bestámma två variabler. De restvarande 3 (=5-2) kommer att förbli obestämda. Ett standard sätt att skriva upp lösningsmängden frå matrisen 1.5.2 är att börja med de sista variablerna. Det finns ingen ledande etta för x_5, och då kan vi sätta $x_5 = r$, där r är ett godtyckligt tal. Likadant erhåller vi att $x_4 = s$ och att $x_3 = t$, där s och t är godtyckliga tal. Men, för x_2 har vi en ledande etta. Ekvationen som svarar till rad skriver vi som $x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2x_4 - x_5$. Insätter vi r, s och t i denna ekvationen får vi att

$$x_2 = -\frac{1}{2}t - 2s - r.$$

Vi har också en ledande etta för x_1, vilket ger att

$$x_1 = -\frac{5}{6}t + \frac{2}{3}r.$$

Lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet 1.5.1 är mängden

$$W(3) = \{ \begin{bmatrix} -\frac{5}{6}t + \frac{2}{3}r \\ -\frac{1}{2}t - 2 - r \\ t \\ s \\ r \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } r, s \text{ och } t\}.$$

Det är viktigt att man kan skriva upp lösningsmängden rätt.

1.6. **Uppgifter.** Kompletterande läsning om detta ämnet finns i Kapitel 1.1 och 1.2 i Anton-Rorres.[1] Rekommenderade uppgifter 1.2: 17-24. Tentamen 5 juni, 2010, Uppgift 3. Tentamen 11 januari, 2010, Uppgift 2. Tentamen 23 oktober, 2009, Uppgift 2.

1.7. **Linjära höljet.** I det senaste exemplet fick vi ingen unik lösning, men en beskrivning av lösningsmängd med tre parametrar r, s och t. Vad kan vi säga om lösningmängden, vad betyder parametrarna? Vi börjar med att diskutera det linjära höljet. Betrakta följande tre vektorer

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{1.7.1}$$

Vektorerna w_1, w_2 och w_3 är alla element i $\mathbf{R}^4$. Deras linjära höljet är delmängden i $\mathbf{R}^4$ som ges av

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3) = \{t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 \mid \text{godtyckliga tal } t_1, t_2, t_3\}.$$

Detta betyder att

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3) = \{ \begin{bmatrix} t_1 + t_3 \\ 2t_1 + t_2 + 3t_3 \\ t_2 + t_3 \\ t_1 + t_2 + 2t_3 \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } t_1, t_2, t_3\}.$$

1.8. **Linjärt hölje och lösningsmängd.** Om vi återgår till lösningsmängden $W(3)$ till det homogena ekvationssystemet 1.5.1 har vi att $W(3) = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$, där

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1] För 9nde upplagan. 1.2: 17-24

Vi inser dock att vektorerna u_1, u_2 och u_3 i lösninsgmängden $W(3)$ inte kan vara de enda (på vilket sätt skulle dessa ha blivit markerade med speciell färg?) Vi har t.ex. att $W(3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ där

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Kolla detta) Men, inte bara kan vi välja olika vektorer utan att ändra det linjära höljet, vi kan också variera antalet. Vi har att

$$W(3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2).$$

Vi kan skriva $W(3)$ som det linjära höljet till hur många vektorer som helst, men kan vi skriva $W(3)$ som det linjära höljet till två vektorer? Detta skulle betyda att vi bara behöver två parametrar, och detta värkar inte rimligt.

1.9. **Uppgifter.** Se också Kapitel 4.2 i Anton-Rorres.[2] Rekommenderade uppgifter 4.2: 7, 8, 11, 12.

1.10. **Minimalt antal vektorer för höljet.** Gauss-Jordan eliminationen i exemplet med det homogena ekvationssystemet 1.5.1 producerar vektorer u_1, u_2, u_3 sådan att ekvationen

$$t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

enbart har lösningen $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. Detta är ett almänt faktum, men låt oss titta på exemplet med lösningsmängden $W(3) = \mathrm{Span}(u_1, u_2, u_3)$. Ekvationen $t_1u_1 + t_2u_2 + t_3u_3 = 0$ ger ekvationssystemet (homogent!)

$$\begin{cases} -\frac{5}{6}t_1 + \frac{2}{3}t_3 & = 0 \\ -\frac{1}{2}t_1 - 2t_2 - t_3 & = 0 \\ t_1 & = 0 \\ t_2 & = 0 \\ t_3 & = 0 \end{cases}$$

De tre sista ekvationerna i ekvationssystemet ger att vi måste ha $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, och sedan har vi att dessa värden $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ också satisfierar de två först ekvationerna.

Definition 1.11. Låt $w_1, \ldots, w_r$ vara vektorer i $\mathbf{R}^n$. Dessa vektorer är linjärt oberoende om ekvationen $t_1w_1 + \cdots + t_rw_r = 0$ enbart har lösning $t_1 = \cdots = t_r = 0$.

[2] 9nde upplagan. 5.2: 7,8, 11, 14

1.12. **Exempel.** Vektorerna u_1, u_2 och u_3 i exemplet med det homogena ekvationssystemet 1.5.1 är linjärt oberoende. Vad med vektorerna w_1, w_2 och w_4 i Exemplet 1.7.1? Ekvationen $t_1w_1 + t_2w_2 + t_3w_3$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} t_1 + t_3 & = 0 \\ 2t_1 + t_2 + 3t_3 & = 0 \\ t_2 + t_3 & = 0 \\ t_1 + t_2 + 2t_3 & = 0 \end{cases}$$

Vi skriver upp den tillhörande matrisen (med en osynlig kolumn), och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $t_3 = r$ kan välja godtyckligt, och att $r_2 = -r$ och att $t_1 = -r$. Lösningmängden till ekvationssystemet ovan har lösningsmängden

$$W = \{[\begin{bmatrix} -r \\ -r \\ r \end{bmatrix} \mid \text{tal } r\}.$$

Detta är inte en enbart punkten $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, vilket betyder att vektorerna w_1, w_2 och w_3 *inte* är linjärt oberoende. Vektorerna är linjärt beroende.

1.13. **Uppgifter.** Se också Anton-Rorres,[3] Kapitel 4.3. Rekommenderade uppgifter 4.3: 2, 3, 8.

1.14. **Bas.** Vektorer $w_1, \ldots, w_r$ i $\mathbf{R}^n$ som är linjärt oberoende kallas en *bas* för $W = \text{Span}(w_1, \ldots, w_r)$. Notera att linjärt oberoende vektorer bildar en bas för deras linjära höljet, inget annat. Vi har att Gauss-Jordan elimination av ett *homogent* ekvationssystem ger oss en bas för lösningsmängden W till ekvationssystemet.

1.15. **Uppgifter.** Rekommenderade uppgifter[4] 4.5: 1-6.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`

[3] 9nde: 5.3: 2, 3, 8

[4] 9nde, 5.4: 12-17