1. Tisdagen 3105

Igår visade vi att lösningsmängden $W \subseteq \mathbf{R}^5$ till ekvationssystemet

$$
\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 5x_5 & = 0 \end{cases} \tag{1.0.1}
$$

har bas u_1 och u_2 och u_3 där

$$
u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

1.1. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^n$ vara lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Vi är nu i situation som liknar gårdagens. Skillnaden är att vi inte har tillgång till ekvationssystemet. Vi vill endå hitta en bas för W.

Exempel 1.2. Lösningsmängden $W \subseteq \mathbf{R}^4$ till något okänt homogent ekvationssystem är beskriven som de vektorer $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ sådan att $AX = 0$, där

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{1.2.1}
$$

Vi vill hitta en bas för W. Om vi skriver ut vad $AX = 0$ betyder får vi att W ges som lösningsmängden till följande homogena ekvationssystem

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 & = 0. \\ x_1 + x_2 + 2x_4 & = 0 \end{cases}
$$

Att hitta en bas för lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem kan vi utföra. Gauss-Jordan elimination ger den reducerade trapsstegsmatrisen

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

vilket har tre ledande ettor. Vi sätter $x_4 = t$, och har att $x_3 = 0$, $x_2 = -t$, och att $x_1 = -t$, där t är ett godtyckligt tal. Detta betyder att mängden W vi betraktar är

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \mid \text{ godtyckliga tal } t \right\}.$$

En bas för W ges av vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.3. Nollrum. Det är rätt klart att påståendet i exemplet ovan inte är specifikt for den valda matrisen. Om A är en given $(m \times n)$-matris, då vill elementen $X \in \mathbf{R}^n$ sådan att $AX = 0$ vara lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Denna lösningsmängd kallas *nollrummet* till matrisen A.

Exempel 1.4. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^3$ vara de vektorer X sådan att $AX = 2X$, där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Skriver vi ut vad $AX = 2X$ betyder, får vi det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x - 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Den reducerade trappstegsmatrisen blir $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Detta ger att en bas för W blir

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.5. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^4$ vara linjen

$$\left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \mid \text{ tal } t \right\}.$$

En bas för W är $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Exempel 1.6. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^4$ vara mängden

$$W = \{ \begin{bmatrix} t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ t_2 + t_4 \\ t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ 2t_2 + 2t_4 \end{bmatrix} \mid \text{ godtyckliga tal } t_1, t_2, t_3, t_4 \}.$$

Denna mängd är lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem, och vi vill hitta en bas för W. Vi ser att W är det linjära höljet till fyra vektorer (sätt $t_1 = 1$ och $t_2 = t_3 = t_4 = 0$ för att få vektorn w_1, sedan $t_2 = 1$ och $t_1 = t_3 = t_4 = 0$ etc).

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord har vi att $W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, och vi är nästan i en situation som vi har behandlat tidligare. Vi har att $w_1, \ldots, w_4$ är en bas för W om vektorerna är linjärt oberoende. Vi kollar detta med att lösa ekvationen $t_1 w_1 + \cdots t_4 w_4 = 0$. Ekvationssystemet blir

$$\begin{cases} t_1 + 2t_3 + 2t_4 & = 0 \\ t_2 + t_4 & = 0 \\ t_1 + 2t_3 + 2t_4 & = 0 \\ 2t_3 + 2t_4 & = 0 \end{cases} \tag{1.6.1}$$

Den tillhörande matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.6.2}$$

Lösningar till ekvationen 1.6.1 erhålles som $t_4 = r$ en godtyclig konstant, $t_3 = s$ en godtycklig konstant, $t_2 = -r$, och $t_1 = -2s - 2r$. Lösningsmängden har två parametrar, och detta betyder att punkten $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ inte är den enda lösningen. Med andra ord är vektorerna w_1, w_2, w_3, w_4 inte linjärt oberoende. Vad gör vi nu?

1.7. Hur hittar man linjärt oberoende vektorer. Notera att om vi har vektorer w_1, w_2, w_3, w_4 i något $\mathbf{R}^n$ som är linjär beroende, då finns det en icke trivial lösning till ekvationen

$$t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 + t_4 w_4 = 0.$$

Icke-trivial betyder att åtminstonde en av skalärerna $t_1, \ldots, t_4$ är nollskild. Om $t_1 \neq 0$, då kan vi skriva ekvationen ovan som

$$w_1 = -\frac{t_2}{t_1} w_2 - \frac{t_3}{t_1} w_3 - \frac{t_4}{t_1} w_4.$$

Detta betyder att w_1 är en linjär kombination av w_2, w_3, w_4. Detta betyder vidare att

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathrm{Span}(w_2, w_3, w_4).$$

Exempel 1.8. Med denna observationen återgår vi till vårt Exempel 1.6. Vi har at lösningarna till ekvationssystemet $t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3 + t_4 w_4 = 0$ ges av

$$\{ \begin{bmatrix} -2r - 2s \\ -s \\ r \\ s \end{bmatrix} \mid \text{godtyckliga tal } r, s \}.$$

Med $s = 0$ erhåller vi lösningen $t_1 = -2r, t_3 = r$ och $t_2 = t_4 = 0$. Detta betyder att med $r = 1$ har vi

$$w_3 = 2w_1.$$

Vi har att w_3 är en linjär kombination av w_1, och vi kan ta bort w_3. Detta betyder att

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_4).$$

Liknande, med $r = 0$ och $s = 1$ får vi att

$$w_4 = 2w_1 + w_2.$$

Detta ger att också w_4 kan skrivas som en linjär kombination av w_1 och w_2. Med andra ord att

$$\mathrm{Span}(w_1, w_2, w_4) = \mathrm{Span}(w_1, w_2).$$

Man kan nu kolla att w_1 och w_2 är linjärt oberoende, vilket också garanteras av de två ledande ettorna i den reducerade trappstegsmatrisen 1.6.2. Vi har att w_1 och w_2 är en bas för W.

Exempel 1.9. Låt A vara matrisen som i 1.2.1, och låt $W \subseteq \mathbf{R}^3$ vara mängden

$$W = \{AX \mid X \in \mathbf{R}^4\}$$

Mängden W är lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Hitta en bas för W. Här har vi inte ens vektorer vars linjära hölje ger W. För att lösa problemet, leker vi lett med vad vi har. Ta vektorn $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{R}^4$. Per definition har vi att Ae_1 är med i W. Vi kallar denna för w_1 och räknar ut att denna blir

$$w_1 = Ae_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

På liknande sätt kan vi beräkna Ae_2, Ae_3, Ae_4, där $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och slutligen $e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger tre vektorer w_2, w_3 och w_4 i W, och dessa är

$$w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad w_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Skall vi lista upp flera vektorer? Svaret är nej. Fördi om vi tar en godtycklig vektor X i $\mathbf{R}^4$ så har vi att

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord har vi att $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ är en linjär kombination av $e_1, \dots, e_4$. Av de vanliga egenskaperna till matrismultiplikation har vi att

$$AX = A(x_1e_1 + \cdots x_4e_4) = x_1Ae_1 + \cdots x_4Ae_4 = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3x_4w_4.$$

Det vill säga att mängden W vi betraktar är det linjära höljet av $w_1, \dots, w_4$,

$$W = \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Att hitta en bas utifrån ett givet antal vektorer har vi precis gjort i exemplet ovan. Vi repeterar snabbt. Vi hittar först lösningarna till $t_1w_1 + \cdots + t_4w_4$. Detta ekvationssystem har matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan elimination ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har tre ledande ettor, vilket betyder att basen skall bestå av tre vektorer. Lösningsmängen till ekvationssystem är $t_4 = t$, godtyckligt tal t, och $t_1 = t_2 = -t$ och $t_3 = 0$. Detta betyder att

$$-w_1 - w_2 + w_4 = 0.$$

. En bas för W ges av w_1, w_2 och w_3.

1.10. Uppgifter. Läs mera i Anton-Rorres,[1] Kapitel 4.7 (4.8). Rekomenderade uppgifter 4.5: 1-6, 7, 12-16 och 4.7: 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12. 4.8: 9. Tentamen 2010-10-22, Uppgift 3. Tentamen 2010-03-15, Uppgift 4.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: skjelnes@kth.se

[1] 9nde: 5.4: 12-18, 21, 22 och 5.5:3,6,7,11,12