1. Onsdagen 0106

1.1. **Vektorrum.** Istället för att säga att W är lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem (som vi inte har) vill vi säg att W är ett vektorrum, eventuelt ett delvektorrum av $\mathbf{R}^n$ om vi vill förtydliga att mängden W är en delmängd av $\mathbf{R}^n$.

1.2. **När är en mängd ett vektorrum.** Men, nu dyker föjlande fråga upp. Om vi är givet en delmängd $W \subseteq \mathbf{R}^n$, när kan vi vara säkra på att W är ett vektorrum. Det vill säga vad måste vara uppfylld av W för att W skall vara lösningsmängden till något homogent ekvationssystem.

Det mest uppenbara är att nollvektorn 0 är med i W. Vi har att nollvektorn alltid är en lösning till ett homogent ekvationssystem. Så om 0 inte är med i W, då kan inte W vara lösningsmängden till ett homogent ekvationssystem. Man ser också lätt att om w_1 och w_2 är två lösningar till ett homogent ekvationssystem då är också $w_1 + w_2$ en lösning, och tw_1 är en lösning för godtyckliga skalärer. Man kan visa att detta är precis vad som krävs.

Definition 1.3. En delmängd $W \subseteq \mathbf{R}^n$ är ett vektorrum om

- Nollvektorn 0 är med i W.
- Om w_1 och w_2 är med i W då är också $w_1 + w_2$ med i W.
- Om w är med i W, då är också tw med i W för godtyckliga t.

Detta ger en abstrakt beskriving av när mängder är lösningsängden till ett (något) homogent ekvationssystem. Låt oss kolla de tidligare exemplen vi har enbart sagt är lösningsmängden till homogena ekvationsssystem.

Exempel 1.4. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.4.1}$$

och betrakta mängden

$$W \subseteq \mathbf{R}^4$$

där elementen X i $\mathbf{R}^4$ tillhör mängden W om och endast om

$$AX = 0.$$

Vi har att nollvektorn är med då $A0 = 0$. Vidare om X och Y är med i W så vill vi kolla att $X + Y$ också är med i W. Vi har att $A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$, och följdaktligen är $X + Y$ också med i mängden W. Slutligen, låt t vara en skalär, och X ett element in W. Vi vill kolla att tX också är med i W. Vi har att $A(tX) = t \cdot AX = t \cdot 0 = 0$, vilket medför att tX är med i W. Vi har visat att W är ett vektorrum.

Exempel 1.5. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^3$ vara mängden av element Y på formen

$$Y = AX,$$

för någon X i $\mathbf{R}^4$, där matrisen A är som i **??**. Vi har att nollvektorn är med i W, tex kan vi välja $X = 0$, och har då att $A0 = 0$. Om $Y_1 = AX_1$ och $Y_2 = AX_2$ är två element i W då vill vi visa att också $Y_1 + Y_2$ är på formen AX för någon X i $\mathbf{R}^4$. Vi kan välja $X_1 + X_2$, fördi $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = Y_1 + Y_2$. Och slutligen, om $Y = AX$, och t en skalär då har vi att tY också är med i W, fördi vi har tX i $\mathbf{R}^4$, och $A(tX) = t \cdot AX = tY$. Vi har att W är ett vektorrum.

1.6. **Kolumnrummet.** Igen är det klart att detta gäller mera allmänt. Om A är en $(m \times n)$-matris, då vill mängden $W \subseteq \mathbf{R}^m$ som består av element på formen $Y = AX$, för något X i $\mathbf{R}^n$ vara ett vektorrum. Detta vektorrum kallas för kolumnrummet till matrisen A. Andledningen till att vektorrummet kallas kolumnrummet till matrisen A är att kolumnerna till matrisen A spänner upp W. Vi har att kolumn i av matrisen A är Ae_i, där elementet e_i i $\mathbf{R}^n$ har noll överalt untagen i koefficient i som är ett i plats i.

1.7. **Dimension.** Varje vektorrum $W \subseteq \mathbf{R}^n$ har en bas.[1] Antalet vektorer som behövs i en bas kallas *dimensionen* till vektorrummet W. Om man har ett homogent ekvationssystem, och utför Gauss-Jordan eliminationen så vill antalet parametrar som behövs för att beskriva lösningsmängen vara lika med dimensionen till lösningsmängden.

1.8. **Koordinatvektor.** Om $w_1, \dots, w_r$ är en bas för vektorrummet $W \subseteq \mathbf{R}$ då kan varje element w i W skrivas på ett unikt sätt som en linjär kombination av basvektorerna. Detta betyder att det till varje vektor w i W finns unika tal $t_1, \dots, t_r$ sådan att

$$w = t_1 w_1 + t_2 w_2 + \cdots t_r w_r.$$

Dessa tal $t_1, \dots, t_r$ kallas *koordinaterna* till vektorn w i basen $\{w_1, \dots, w_r\}$. Om vi kallar basen $\beta = \{w_1, \dots, w_r\}$ då skriver vi koordinatmatrisen till vektorn w som

$$[w]_\beta = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix}_\beta .$$

I koordinatmatrisen till w har vi placerad in koordinaterna till w i en matris.

[1] uhm, förutom nollrummet kan man tycka. Nollrummet har den tomma mängden som bas.

Exempel 1.9. I ett tidligare exempel så vi att vektorerna

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

är en bas för

$$W = \{ \begin{bmatrix} t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ t_2 + t_4 \\ t_1 + 2t_3 + 2t_4 \\ 2t_2 + 2t_4 \end{bmatrix} \mid \text{ tal } t_1, t_2, t_3, t_4 \}.$$

T.ex. vill vektorn $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ vara ett element i W. Vi har att

$$w = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $w = 2w_1 + 3w_3$, och koordinatmatrisen till vektorn w i basen $\beta = \{w_1, w_2\}$ är

$$[w]_\beta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_\beta.$$

Exempel 1.10. Vektorerna $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för $\mathbf{R}^2$. Denna bas $S = \{e_1, e_2\}$ kallas standardbasen för $\mathbf{R}^2$. Vektorn $w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ har koordinatmataris i basen S, lika med

$$[w]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

fördi vi har att $w = 4e_1 + 2e_2$.

Exempel 1.11. Vektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{R}^2$ är linjärt oberoende. Om de vore linjärt beroende vill $v_1 = tv_2$ vara en skalär multippel av v_2. Detta är uppenbarligen inte fallet. Därmed har vi att $B = \{v_1, v_2\}$ är en bas för deras linjära hölje $W = \text{span}(v_1, v_2) \subseteq \mathbf{R}^2$. Båda W och $\mathbf{R}^2$ är två dimensionella, och det följer att $W = \mathbf{R}^2$. Vektorerna $B = \{v_1, v_2\}$ är en bas för $\mathbf{R}^2$. Speciellt har vi att vektorn

$w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ kan skrivas som en linär kombination av v_1 och v_2. Ekvationen $w = sv_1 + tv_2$ skriver vi som

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

Istället för att använda Gauss-Jordan, tar vi och inverterar (2×2)-matrisen ovan. Detta ger

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Detta betyder att koordinatmatrisen till w i basen B är

$$[w]_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}_B.$$

Vi kan också kolla att $w = -8v_1 + 6v_2$, vi har

$$w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Specielt kan vi uttrycka e_1 och e_2 i basen B. Vi får att

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vilket ger att $[e_1]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_B$ och att $[e_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_B$. Vi har att vektorn $w = -4e_1 + 2e_2$, och det följer att

$$[w]_B = -4[e_1]_B + 2[e_2]_B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.12. Vektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{R}^3$ är linjärt oberoende. Därmed bildar de en bas B för $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ som är ett plan.

Är vektorn $w = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ med i planet. Med andra ord kan w skrivas som en linjär kombination av v_1 och v_2, dvs. finns det tal s och t sådan att

$$w = sv_1 + tv_2.$$

Detta ger ett ekvationssystem i två okända s och t, med tre ekvationer. Löser man ut ekvationssystemet hittar man att $s = 2$ och $t = 3$. Vilket betyder att

$$[w]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B.$$

Exempel 1.13. En ekvation för planet W i exemplet ovan kan du producera. Kolla att vektorn w satisfierar planets ekvation.

Exempel 1.14. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

har egenvärden $\lambda = 2$ och $\lambda = 1$. Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 2$ (dvs vektorerna X sådan att $AX = 2X$) är mängden

$$W_2 = \{ \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} \}.$$

En bas för W_2 är $E_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Egenrummet till egenvärdet $\lambda = 1$ är mängden

$$W_1 = \{ \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} \},$$

som har bas $E_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vektorerna E_1, E_2 och E_3 är linjärt oberoende... Och detta betyder att $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ är en bas för $\mathbf{R}^3$. Låt w vara en vektor i $\mathbf{R}^3$, och skriv $w = xE_1 + yE_2 + zE_3$. Detta betyder att koordinatmatrisen till w i basen $B = \{E_1, E_2, E_3\}$ är $\left[w\right]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B$.

Detta betyder att

$$w = x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - 2z \\ y + z \\ x + z \end{bmatrix}.$$

Eller mera kompakt att

$$[w]_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[w\right]_B,$$

där S är standardmatrisen.

Exempel 1.15. Vi fortsätter med Exemplet (1.14). I exemplet fick vi fram matrisen

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

som hade egenskapen att $\left[w\right]_S = P\left[w\right]_B$, där $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ är standardbasen och $B = \{E_1, E_2, E_3\}$. Matrisen

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

är inversen till P. Och denna matris har egenskapen att

$$\left[w\right]_B = Q\left[w\right]_S.$$

Vi kollar några exempel. Vektorn e_1 har koordinatmatris $\left[e_1\right]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_S$ i standardbasen. Av formeln ovan har vi att

$$\left[e_1\right]_E = Q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi har också att $1 \cdot E_1 - 1 \cdot E_3 = e_1$. Låt oss också kolla vektorn $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi har att

$$Q \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Detta skall betyda att $\left[w\right]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, vilket är ekvivalent med att

$$w = 4E_1 + 4_2 - 3E_3 = 4\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.16. **Uppgifter.** Mer läsning i Anton-Rorres, [2] kapitlerna 4.4, 4.5, 4.6 och 4.7. Rekomenderad uppgifter 4.4: 1, 2, 3, 7, 8, 9, och 4.5: 7,8 och 4.6: 1,2 ,6 samt 4.2: 11, 12, 15, 20. Tentamen 22 oktober, 2010, Uppgift 3. Tentamen 15 mars, 2010, Uppgift 4.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`

[2] 9nde: 5.2:11, 12, 14,15, 20 och 5.4; 18,19 och 6.5: 1,2, 6 och 5.4: 1, 2, 3, 7, 8,9