1. Fredagen 0306

1.1. **Avbildningar.** Låt A vara matrisen

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

Till varje vektor X i $\mathbf{R}^4$ får vi vid matrismultiplikationen AX en vektor i $\mathbf{R}^3$. Mera explicit, om $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ är en given punkt i $\mathbf{R}^4$, då får vi punkten

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

i $\mathbf{R}^3$. På detta sätt ger matrisen A upphov till en funktion, eller avbildning, från $\mathbf{R}^4$ till $\mathbf{R}^3$. Vi vill skriva detta som $T_A \colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Och mera allmänt, om A är en $(m \times n)$-matris, då ger matrismultiplikationen en avbildning $T_A \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$.

Exempel 1.2. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ger en avbildning $T_A \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Geometrisk vill avbildningen sträcka x-ledet med faktor två, och spegla y-ledet omkring x-axeln.

Exempel 1.3. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ger en avbildning $T_A \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Punkten $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ skickas till $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, och punkten $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ skickas till $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta betyder att enhets kvadratet med hörn i origo, e_1 och e_2 och $e_1 + e_2$ vrids med 45 grader moturs, och sträcks med $\sqrt{2}$ i varje led. Vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Detta betyder att avbildningen T_A ges som samansätningen av avbildningen T_C och T_B, där

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Avbildningen $T_C \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ ges som multiplikation med matrisen C, och denna matris är rotationsmatrisen med vinkel 45 grader moturs. Avbildningen $T_B \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ sträcker x och y -led med faktorn $\sqrt{2}$. Den sammansätta avbildningen $T_B \circ T_C \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som *först* roterar planet med 45 grader, och *sedan* sträcker koordinaterna med faktorn $\sqrt{2}$ ges av att först multiplicera med C, och sedan med matrisen B. Det vill säga

$$T_B \circ T_C(X) = B \cdot C \cdot X.$$

Håll ordning på vilken ordning matriserna skall multipliceras. I detta exemplet är $BC = CB$, vilket betyder att man också kan beskriva T_A som först att sträcka med faktorn $\sqrt{2}$ och sedan rotera. I allmänhet vill inte matrisprodukten vara kommutativ, och de två olika produkterna ger två olika avbildningar.

Exempel 1.4. Tentamen 2010-06-05, Uppgift 2. Här är man given matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Först skall man beräkna potenserna A^n med $n = \pm 2, \pm 1, 0$. Vi har att A^0 är identitetsmatrisen. Inversmatrisen

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{1} \end{bmatrix}.$$

Man räknar ut $A^2 = A \cdot A$ och $A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}$. Matrisen A ger en avbildning $T_A\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Andra del av uppgiften är att bestämma $T_A(\Omega)$, där Ω är rektangel med hörn i origo, $2e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $2e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $2e_1 + 2e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi beräknar att $T(2e_1) = A \cdot 2e_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ och att $T(2e_2) = A \cdot 2e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Detta betyder att $T_A(\Omega)$ är rektangel med hörn i origo, $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1.5. **Enhetskub och volym.** Vi låter enhetskuben $K \subset \mathbf{R}^n$ vara "kuben" som bestäms av hörnen $e_1, \ldots, e_n$ och origo. I $\mathbf{R}^3$ har vi en äkta kub, i planet är enhetskuben lika med enhetskvadratet, och i linjen är enhetskuben lika med ett linjesegment. Vi definerar enhetskuben $K \subseteq \mathbf{R}^n$ att ha volym 1. Detta betyder att till varje avgränsad mängd i $L \subset \mathbf{R}^n$ kan vi fråga oss hur många enhetskuber som får plats i L, och detta antalet definierar vi som volymen till L. Låt A vara en $(n \times n)$-matris, och betrakta den associerade avbildningen $T_A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Vi har att

$$\mid \det(A) \mid = \text{Volym}(T_A(K)).$$

Exempel 1.6. I Exempel 1.2 så vi att enhetskvadratet skickades till ett rektangel med area 2. Och vi har att determinanten till matrisen A är -2, och specielt att beloppet är 2. I Exempel 1.3 skickades enhetskvadratet till ett kvadrat med sidolängder $\sqrt{2}$. Arean blir $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$, vilket också är determinantens värde.

1.7. **Inverterbarhet.** Vissa avbildningar $T_A\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är inverterbara. Detta betyder att det finns en avbildning $U\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ sådan att de två sammansätningarna $U \circ T_A$ och $T_A \circ U$ båda blir lika med identitetsavbildningen. Vi har att en avbildning $T_A\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är inverterbar om och endast om matrisen A är inverterbar, vilket är ekvivalent med determinanten till A är nollskild. Den inversa avbildningen till T_A ges av matrismultiplikationen $T_{A^{-1}}$.

Exempel 1.8. Tentamen 2010 03 15, Uppgift 2: Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ger en avbildning $T_A\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Området Ω skickas till ett rektangel med hörn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi skall bestämma Ω. Det är nog att bestämma urbilderna av de fyra punkterna ovan. Detta ger linjära ekvationssystem. Urbilden till hörnet $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ges av $T_A(X) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, vilket tillsvarar ekvationssystemet

$$T_A(X) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta kan man lösa ut med Gauss-Jordan, hörn för hörn.

Ett annat sätt att lösa uppgiften är att beräkna inversa avbildningen. Matrisen A har determinant 3, och är således inverterbar med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inversa avbildningen till T_A ges av $T_{A^{-1}}$. Vi har att

$$T_{A^{-1}}(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Och att $T_{A^{-1}}(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dessa två hörn, tillsammans med origo och $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ beskriver Ω.

1.9. **Linjär avbildning.** En avbildning $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ kallas *linjär* om

$$T(sX + tY) = sT(X) + tT(Y)$$

för alla vektorer X och Y i $\mathbf{R}^n$, och alla skalärer s och t. Detta är ett viktigt begrepp som abstraherar egenskaperna vid matrismultiplikationen.

1.10. **Matrismultiplikation och linjära avbildningar.** Om A är en $(m \times n)$-matris, då är den associerade avbildningen $T_A \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ linjär. Vi har nämligen att

$$T_A(sX + tY) = A \cdot (sX + tY) = sAX + tAY = sT_A(X) + tT_A(Y).$$

Det omvända gäller också. Låt $T \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns det en (unik) matris A sådan att $T = T_A$. Matrisen ges som följer

$$A = \left[T(e_1) \mid T(e_1) \mid \cdots \mid T(e_n) \right]. \tag{1.10.1}$$

Exempel 1.11. Tentamen 2009 10 23, Uppgift 2. Vi skall bestämma matris för en linjär avbildning $T \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}2$ som uppfyller

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vi vill använda Formel 1.10.1, och till detta behöver vi att bestämma $T(e_1), T(e_2)$ samt $T(e_3)$. Ok, den sista är klar, vi har nämligen att $T(e_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. För att bestämma $T(e_1)$ skriver vi

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta linjära ekvationssystem har lösning $t_1 = t_3 = 1$ och $t_2 = 0$. Avbildningen $T \colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ är linjär, och vi har att

$$T(e_1) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}) + T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vi skriver sedan e_2 som en linjär kombination av de tre vektorerna och erhåller att

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$T(e_2) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) - 2T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Matrisen vi söker blir

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 7 & -9 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.12. Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges som ortogonal projektionen ned på linjen $L = \{3x + 4y = 0\}$. Bestäm matrisen A sådan att $T_A = T$.

Det är inte lätt att läsa av $T(e_1)$ och $T(e_2)$, vilket vi behöver för att använda Formel 1.10.1. Vi skriver linjen L som

$$L = \{t \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \mid \text{tal } t\}.$$

Detta betyder att $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ är en bas för L. Vi har också att $w = \frac{1}{5}v$ är en bas. Och då v har längd 5 är w en orthonormal bas för L: Varje vektor har längd ett, och varje två olika vektorer är orthogonala. Då har vi att ortogonalprojektionen av en godtycklig punkt X ges av

$$T(X) = \mathrm{proj}_L(X) =< X, w > \cdot w.$$

Om punkten $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, så har vi att

$$T(X) = \frac{4x - 3y}{5} \cdot w = \frac{4x - 3y}{5} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Specielt har vi att $T(e_1) = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} \\ -\frac{12}{25} \end{bmatrix}$ och att $T(e_2) = \begin{bmatrix} -\frac{12}{25} \\ \frac{9}{25} \end{bmatrix}$. Matrisen vi söker är

$$A = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.13. Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ vara spegling om linjen $L = \{3x + 4y = 0\}$. Vi har att

$$T(X) = -X + 2\mathrm{proj}_L(X).$$

Av detta kan vi bestämma $T(e_1)$ och $T(e_2)$, och sedan få matrisen A sådan att $T_A = T$.

1.14. **Uppgifter.** Tentamen 2011.03.16, Uppgift 2 och 3. Tentamen 2011.01.10, Uppgift 2. Tentamen 2010.04.17, Uppgift 7. Tentamen 2010.03.15, Uppgift 3. Tentamen 2010.01.11, Uppgift 2. Tentamen 2009.12.15, Uppgift 2. Anton-Rorres[1], Sektion 4.9: 8,9,12-21, Sektion 4.10: 3-10, 21-23 och Sektion 4.11: 1,6.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`

[1]Nionde upplagan. Section 4.2: 2-6, 8-19 och Sektion 4.2 13,14,15