1. Lördagen 04.06

1.1. Nu vill vi fokusera på linjära avbildningar från vektorrum W. Om $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är en linjär avbildning, och $W \subseteq \mathbf{R}^n$ ett vektorrum, då har vi en inducerad avbildning $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Och denna avbildning är linjär.

Exempel 1.2. Låt $T\colon \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ vara avbildningen

$$T(X) = T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Projektionen på första faktorerna, tredje och femte faktor Detta är en linjär avbildning. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^5$ vara vektorrummet som ges som lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 & = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 5x_5 & = 0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Vi studerade detta vektorrum i måndags. Den inducerade avbildningen $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^3$ är simpelthen

$$T(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_3 \\ w_5 \end{bmatrix}.$$

Och vi vill gärna representera denna avbildning med en matris. Detta ges dock inte av formeln $A = \big[T_{|W}(e_1) \cdots T_{|W}(e_n)\big]$. En av anledningarna är att t.ex. e_1 inte finns med i W. Då e_1 inte är med i W kan vi inte prata om $T_{|W}(e_1)$.

1.3. Representera linjära avbildningar med matriser. Vi har den linjära avbildningen $T_{|W}\colon W \longrightarrow \mathbf{R}^3$ från Exempel 1.2, och vi vill representera denna med en matris. Lösningen är att välja en bas för vektorrummet W. Vi har tidligare sätt att vektorerna

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas för W. Vi applicerar avbildningen $T = T_{|W}$ på dessa tre punkt, och har att

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(u_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(u_3) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kommer nu att representera varje vektor w i W med sin koordinatmatris med avseende på basen $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$. Betrakta nu matrisen

$$B = \begin{bmatrix} T(u_1) & T(u_2) & T(u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jag hävdar nu att

$$T(w) = B \cdot \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}_\beta .$$

Eller, för att vara mera specifik. Om vektorn $w = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3$, då har vi att

$$T(w) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} t_1 + \frac{2}{3} t_3 \\ t_1 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

På den andra sidan har vi att om $w = t_1 w_1 + t_2 w_2 + t_3 w_3$, dåhar vi att

$$w = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} t_1 + \frac{2}{3} t_3 \\ -\frac{1}{2} t_1 - 2t_2 - t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

och vi har att $T(w) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} t_1 + \frac{2}{3} t_3 \\ t_1 \\ t_3 \end{bmatrix}$, vilket visar vad vi hävdade.

1.4. En allmän formel. Om $T \colon W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ är en linjär avbildning, och $\beta = \{w_1, \ldots, w_r\}$ är en bas för W då kan vi representera avbildningen T med en matris och matrismultiplikation. Vi bildar matrisen

$$B = \begin{bmatrix} T(w_1) & \cdots & T(w_r) \end{bmatrix}$$

som är en $(n \times r)$-matris. För varje vektor w i W har vi följande samband

$$T(w) = B \cdot \begin{bmatrix} w \end{bmatrix}_\beta .$$

1.5. Notera att om $W = \mathbf{R}^n$, och basen som vi väljer är standardbasen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ då blir den allmänna formeln den som vi redan har för linjära avbildningar.

Exempel 1.6. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^2$ vara linjen som ges som lösningsmängd till ekvationen $3x+4y=0$. Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ vara spegling om linjen W. Av rent geometriska argument ser man att

$$T(X) = -X + 2\text{proj}_W(X).$$

Så om vi låter $w = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ så är detta en orthonormal bas för W. Om $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ då blir

$$\text{proj}_W(X) =< X, w > w = \frac{1}{5}(4x-3y)\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$T(X) = -\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{2}{25}(4x-3y)\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Och slutligen att standardmatrisen blir

$$A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$$

Exempel 1.7. Vi betraktar samma avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som exemplet ovan; spegling om linjen $L = \{3x+4y\}$. Nu väljer vi dock en annan bas för $W = \mathbf{R}^2$, vektorrummet var avbildningen T går ifrån. Vi låter $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, och $w = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$. Vektorn v är en bas för linjen L, och vektorn w är en bas för normallinjen till L. Dessa två vektorer utgör en bas $\beta = \{v, w\}$ för $W = \mathbf{R}^2$. Vi har att $T(v) = v =$ och att $T(w) = -w$, vilket betyder att

$$A = \left[T(v) \mid T(w)\right] = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$$

representerar avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$.

Exempel 1.8. Låt oss nu summera. Vi har i exemplerna 1.6 och 1.7 gett olika matrisrepresentationer av en och samma linjära avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Dessa två matriser vi fick var

$$A_1 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Där A_1 var standardmatrisen i Exempel 1.6, och matrisen A_2 kom i Exempel 1.7. Båda matriser beskriver den linjära avbildningen som speglar planet i linjen $L = \{3x+4y=0\}$. Låt $S = \{e_1, e_2\}$ beteckna standarbasen och $\beta = \{v, w\}$ vara basen i Exempel 1.7. Detta betyder att för varje punkt X i planet $\mathbf{R}^2$ har vi

$$T(X) = A_1 X = A_1 \cdot [X]_S = A_2[X]_\beta.$$

Till exempel har vi att med $X = v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ att $T(v) = v$. Vi har också att

$$A_1 v = A_1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 4 \cdot 7 + 3 \cdot 24 \\ 4 \cdot (-24) + -3 \cdot (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Och att

$$A_2 [v]_\beta = A_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

1.9. Identifikation av vektorrum. Låt $W \subseteq \mathbf{R}^m$ vara ett vektorrum, och låt $\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$ vara en bas för W. Vi bildar den linjära avbildningen $T \colon W \longrightarrow \mathbf{R}^n$ som skickar en godtycklig vektor $w = t_1 w_1 + \cdots t_n w_n$ till

$$T(w) = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

Matrisen som representerar denna linjära avbildning är identitetsmatrisen. Avbildningen T identifierar W med $\mathbf{R}^n$. Alla vektorrum med samma dimension är lika. Ett vektorrum av dimension n kan alltid identifieras med $\mathbf{R}^n$.

Detta betyder att varje vektorrum, dvs varje lösningsmängd till ett homogent ekvationssystem, alltid kan identifieras med $\mathbf{R}^n$, för något n. Och, även om man tillåter mera allmänna vektorrum, dvs. abstrakta vektorrum som inte nödvändigtvis är delmängder av $\mathbf{R}^n$, så vill dessa abstrakta vektorrum vara identifierbara med $\mathbf{R}^r$ för något r.

Exempel 1.10. Låt $L \subseteq \mathbf{R}^2$ vara linjen som ges av ekvationen $3x + 4y = 0$. Med andra ord har vi att L är lösningsmängden till det homogena ekvationssystemet $3x + 4y = 0$. Vi har att L är ett vektorrum, och att en bas ges av t.ex. vektorn $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Detta betyder att

$$L = \{ \begin{bmatrix} 4t \\ -3t \end{bmatrix} \mid \text{ tal } t\}.$$

Om vi väljer att glömma bort att L är en delmängd av planet $\mathbf{R}^2$ så är L inget annat enn den reella linjen $\mathbf{R}$. En identifikation görs vid avbildningen $T \colon L \longrightarrow \mathbf{R}$, som skickar

$$T(\begin{bmatrix} 4t \\ -3t \end{bmatrix}) = t \cdot 1.$$

Med andra ord identifierar vi basen $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ med basen 1 för de reella talen.

1.11. En enda mera allmän formel. Om vi tänker oss en linjär avbildning $T\colon W \longrightarrow V$ mellan två vektorrum, så kan även denna representeras med en matris och matrismultiplikation. Vi måste dock välja en bas $\beta = \{w_1, \dots, w_r\}$ för W, och en bas $\gamma = \{v_1, \dots, v_s\}$ för V. Konstruera matrisen

$$B = \begin{bmatrix} \big[T(w_1)\big]_\gamma & \cdots & \big[T(w_r)\big]_\gamma \end{bmatrix}.$$

Matrisen B består av r kolumner. För att bestämma kolumn 1, tar vi och applicerar avbildningen T på vektorn w_1, detta ger $T(w_1)$. Därefter tar vi och bestämmer koordinatmatrisen till $T(w_1)$ i basen γ, detta symboliseras med $\big[T(w_1)\big]_\gamma$. Detta är kolumn ett i matrisen B. För varje vektor w i W har vi att

$$\big[T(w)\big]_\gamma = B\,\big[w\big]_\beta.$$

Exempel 1.12. Låt oss igen titta på den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som ges som speglingen om linjen $L = \{3x + 4y = 0\}$. Vi väljer nu basen $\beta = \{v, w\} = \gamma$, där $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ och där $w = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Vi har i exemplerna ovan sätt att $T(v) = v$ och att $T(w) = -w$. Detta betyder att $T(v) = 1 \cdot v + 0 \cdot w$ och att $T(w) = 0 \cdot v + 1 \cdot w$. Och att matrisrepresentationen blir

$$B = \begin{bmatrix} \big[T(v)\big]_\gamma & \big[T(w)\big]_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exempel 1.13. Vi gjorde ett exempel med allmänna vektorrum. Detta tror jag inte att ni tyckte om. Exemplet var Tentamensuppgift 8 från tentamen 2010.01.10. Låt V vara vektorrummet av symmetriska (2×2)-matriser. Innan vi fortsätter med uppgiften, notera nu att mängden av alla (2×2)-matriser är

$$M = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \text{tal } a, b, c, d\}.$$

En matris $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i mängden M är symmetrisk om och endast om $c = b$. Detta betyder att mängden av alla symmetriska matriser är

$$V = \{\begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \mid \text{tal } r, s, t\}.$$

Uppgiften ger oss att mängden V är ett vektorrum. Vi har också givet följande tre matriser

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Av beskrivningen ovan följer det nu att en godtycklig symmetrisk matris $X = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$ kan skrivas

$$X = rv_1 + sv_2 + tv_3.$$

Detta betyder att det linjära höljet $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = V$. Att vektorerna v_1, v_2 och v_3 är linjärt oberoende är uppenbart (!). Detta betyder att $\beta = \{v_1, v_2, v3\}$ är en bas för V.

Betrakta nu den linjära avbildningen $T\colon V \longrightarrow V$ som skickar en godtycklig symmetrisk matris X till $T(X) = PXP$, där matrisen $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Detta betyder att om $X = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$ då har vi att

$$T(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t & s \\ s & -r \end{bmatrix}.$$

Specielt har vi att

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0v_1 + 0v_2 - 1v_3.$$

Och vi har att $T(v_2) = v_2$, och att $T(v_3) = -v_1$. Detta ger att matrisrepresentation av avbildningen $T\colon V \longrightarrow V$ är matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.14. Uppgifter. Tentamen 2010.10.22 Uppgift 2 och 7. Tentamen 2009.12.15 Uppgift 7. Anton-Rorres[1], Sektion 8.1: 9,17, 34. Sektion 8.4: 4, 5, 6, 9, 10.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KTH, STOCKHOLM, SWEDEN
E-mail address: `skjelnes@kth.se`

[1] 9nde. 8.1: 12-16, 8.4:4,5,6, 9,10