1. Tisdagen 0706

Exempel 1.1. Tentamen 2010.06.05, Uppgift 10. Detta är absolut den bästa uppgiften någonsin. Vi har givet en linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ som är bestämd av

$$T(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3 \quad T(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad T(e_3) = e_2 + 3e_3.$$

Som vanligt betecknar $\{e_1, e_2, e_3\}$ standardbasen. Mär att detta betyder att en godtycklig punkt $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ skickas till punkten

$$T(X) = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y + z \\ y + 3z \end{bmatrix}.$$

Vi har vidare givet vektorrummet $V = \{x + y + z = 0\}$. Den första uppgiften är att visa att varje punkt v i V skickas till V. En bas för V ges av de två vektorerna $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta betyder att en godtycklig punkt v i V är på formen $v = rv_1 + sv_2$, med tal r och s. Vi har att $T(v) = rv_1 + 2sv_2$, som är en linjär kombination av v_1 och v_2. Och följdaktligen är $T(v)$ i V. Man kan också se detta ved att kolla att koefficienterna i $T(v)$ satisfierar planets ekvation. Vi har at

$$T(v) = \begin{bmatrix} -r - 2s \\ r \\ 2s \end{bmatrix}.$$

Nästa uppgift är att bestämma en matrisrepresentation för den inducerade linjära avbildningen $S\colon V \longrightarrow V$. Vi har en bas $\beta = \{v_1, v_2\}$ för V, och vi har redan sätt att $(V_1) = v_1$ och att $S(v_2) = 2v_2$ (Detta betyder att vi faktisk har en bas betsående av egenvektorer för avbildningen). Matrisrepresentationen blir

$$A = \Big[\big[S(v_1)\big]_\beta \mid \big[S(v_2)\big]_\beta \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2. **Fundamentalsats.** Låt $T\colon W \longrightarrow V$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum W och V. *Kärnan* till avbildningen T är alla w i W sådan att $T(w) = 0$. Kärnan är ett vektorrum. Om man representerar avbildningen T med en matris A då vill kärnan till avbildningen T vara nollrummet till matrisen A. *Bildrummet* till avbildningen $T\colon W \longrightarrow V$ är alla vektorer v i V på formen $v = T(w)$, för någon vektor w i W. Bildrummet är ett vektorrum. Och om matrisen A representerar avbildningen T då vill bildrummet vara given som kolumnrummet till matrisen A.

Följande är ett fundamentalt resultat. Om $T\colon W \longrightarrow V$ är en linjär avbildning då har vi att

$$\dim(W) = \dim(\text{Kärna(T)}) + \dim(\text{Bild(T)}).$$

1.3. **Basbyte.** Vi vill nu titta på en klass av specialfall. Vi låter $W = V = \mathbf{R}^n$, och låter avbildningen $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ vara identitetsavbildningen. Detta betyder att $T(X) = X$ för alla vektorer X i $\mathbf{R}^n$. Vi väljer en bas $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ för domän, och en bas $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ för co-domän. Matrisrepresentationen blir nu

$$P = \left[\left[w_1\right]_\gamma \mid \cdots \mid \left[w_n\right]_\gamma \right].$$

Matrisen P är övergångsmatrisen *från* basen β *till* basen γ. Sambandet ges av

$$P\left[X\right]_\beta = \left[X\right]_\gamma$$

Exempel 1.4. I ett tidligare exempel så tittade vi på följande (egen)-vektorer

$$E_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbf{R}^3$. Dessa tre vektorer är linjärt oberoende, och bildar en bas $\beta = \{E_1, E_2.E_3\}$ för $\mathbf{R}^3$. ÖVergångsmatrisen P från basen β till standardbasen $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ ges som

$$P = \left[\left[E_1\right]_S \left[E_2\right]_S \left[E_3\right]_S\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Övergångsmatrisen från basen S till basen β ges av matrisen

$$Q = \left[\left[e_1\right]_\beta \left[e_2\right]_\beta \left[e_3\right]_\beta \right].$$

För att bestämma Q måste vi uttrycka $e_1 = t_1E_1 + t_2E_2 + t_3E_3$, med tal t_1, t_2, t_3. Löser man detta linjära ekvationssystem får man

$$e_1 = E_1 + E_2 - E_3.$$

Och likadana beräkningar ger att $e_2 = E_2$, och att $e_3 = 2E_1 + E_2 - E_3$. Detta ger att

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Man kan nu kolla att $P^{-1} = Q$, vilket också gäller allmänt. Om P är övergångsmatrisen från basen β till basen γ, då vill P^{-1} vara övergångsmatrisen från basen γ till basen β.

1.5. **Kommutativt diagram.** Låt $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning, och låt $\mathrm{id}\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ vara identitetsavbildningen. Vi har då följande kommutativa diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbf{R}^n \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathbf{R}^n \arrow[r, "T"] & \mathbf{R}^n,
\end{tikzcd}$$

vilket betyder att om man börjar i vänstre övre hörn såblir resultatet i nedre högra hörn det samma, oberoende av vilken väg man väljer. Om vi tar den övre vägen: En vektor X skickas först till $T(X)$, och denna vektor skickas sedan med identitetsavbildningen till $\mathrm{id}(T(X)) = T(X)$. Nedre vägen ger att vektorn X skickas först till $\mathrm{id}(X)$, och sedan till $T(\mathrm{id}(X)) = T(X)$. Detta är trivialt.

1.6. **Kommutativt diagram med matriser.** Vi är i situationen som ovan, men nu väljer vi en bas $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ för $\mathbf{R}^n$, både för domän och codomän. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ representeras med matrisen

$$D = \left[\left[T(w_1)\right]_\beta \cdots \left[T(w_n)\right]_\beta \right].$$

Vi väljer också en bas till för $\mathbf{R}^n$. Detta kan vära standardbasen, men också mera almänt. Låt $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ vara en bas för $\mathbf{R}^n$. Vi har att matrisen

$$A = \left[\left[T(e_1)\right]_S \cdots \left[T(e_n)\right]_S \right].$$

representerar avbildninge $T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ med avseende på basen S för domän och codomän. Låt vidare P vara övergångsmatrisen från basen β till basen S. Det kommutativa diagrammet ovan ger följande likhet. Låt X vara en godtycklig vektor i $\mathbf{R}^n$. Om vi först anvüder avbildningen T, och sedan identitetsavbildningen har vi att

$$\left[\mathrm{id}(T(X))\right]_S = PD \left[X\right]_\beta.$$

Detta får vi om vi går den övre vägen i diagrammet. Den nedre vägen ger

$$\left[T(\mathrm{id}(X))\right]_S = AP \left[X\right]_\beta.$$

Att diagrammet var kommutativt betyder att $PD \left[X\right]_\beta = AP \left[X\right]_\beta$ för alla vektorer X. Vilket medför att vi har följande identitet av matriser

$$PD = AP.$$

Exempel 1.7. Matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ representerar en linjär avbildning med avseende på standardbasen $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ för $\mathbf{R}^3$. Vi har att matrisen A har egenvektorer E_1, E_2 och E_3 som i Exemplet 1.4. Dessa vektorer bildar en bas $\beta = \{E_1, E_2, E_3\}$. Vi har att $AE_1 = 2E_1$, att $AE_2 = 2E_2$ och att $AE_1 = E_1$. Detta betyder att egenvärderna är

2 och 1. Och specielt att den linjära avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ är sådan att $T(E_1) = 2E_1.T(E_2) = 2E_2$ och att $T(E_3) = E_3$. Matrisrepresentation av avbildningen T i basen β blir

$$D = \Big[\big[T(E_1)\big]_\beta \, \big[T(E_2)\big]_\beta \, \big[T(E_3)\big]_\beta \Big] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sambandet mellan de två matrisrepresentationenerna A och D till avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ ges av $AP = PD$, där

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

är övergångsmatrisen från basen β till basen S.

Lycka till!

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`