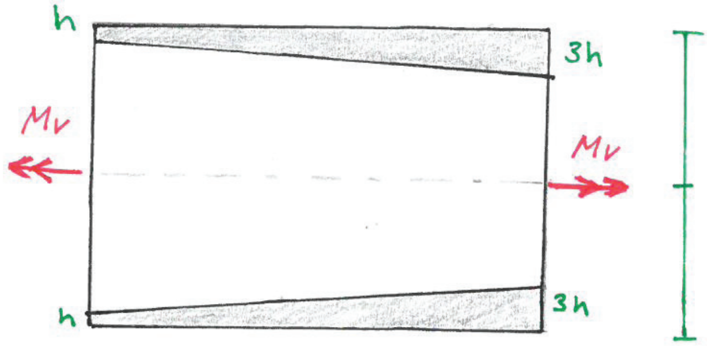
2.6.12 Givet: Tunnväggigt rör med varierande tjocklek

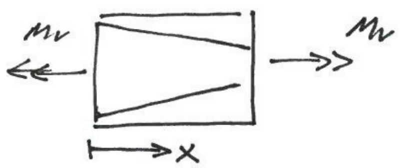


- Skjuvmodul G
- Tjocklek fr. h till $3h$ (lin.)
- Längd L
- Vridmoment M_v
- Tunnväggig struktur $h \ll a, L$

Sökt: Total förvridning θ

Lösning

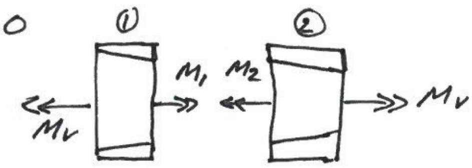
1. Friläggning



2. Jmv

$\twoheadrightarrow: -M_v + M_v = 0$

3. Snitta



4. Jmv

$\underset{1}{\twoheadrightarrow}: -M_v + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = M_v$

$\underset{2}{\twoheadrightarrow}: -M_2 + M_v = 0 \Rightarrow M_2 = M_v$

dvs vridmoment M_v verkar i varje snitt ... däremot varierar vridstyvhetens tvärsnittsfaktor K ty tjockleken varierar

$\Rightarrow$ ej konstant förvridning per längd "ϑ"

$\Rightarrow$ Om vi delar upp röret i tunna skivor med längd dx så kan vi anta att ϑ är konstant i varje skiva

$\Rightarrow \left[\theta = \frac{M_v L}{GK}\right]$ gäller i varje snittskiva

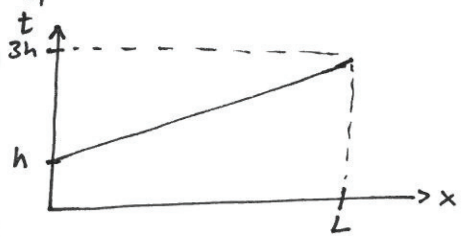
$$\therefore \quad \theta_{tot} = d\theta_1 + d\theta_2 + \ldots = \int_0^L \frac{M_v}{GK(x)}\,dx = \int_0^L \vartheta(x)\,dx$$

$\vartheta = \frac{M_v}{GK}$

$\theta = \vartheta \cdot L = \frac{M_v L}{GK}$

$\Rightarrow$ Bestämma $K(x)$:

Tjocklek t varierar med x enligt



$\Rightarrow \{y = kx + m\}$

$$\underline{t(x) = h + \frac{2h}{L}\cdot x} \Longrightarrow K(x) = 2\pi a^3 \cdot h\left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

Obs Antagandet om tunnvägg gäller fortfarande

Således fås total förvridning som

$$\theta_{tot} = \int_0^L \vartheta(x)\,dx = \int_0^L \frac{M_v}{G \cdot 2\pi a^3 h\left(1 + \frac{2x}{L}\right)}\cdot dx = \frac{M_v}{G\cdot 2\pi a^3 h}\cdot \int_0^L \frac{1}{1 + \frac{2x}{L}}\cdot dx$$

$$= \frac{M_v \cdot L}{2\pi G a^3 h}\cdot \int_0^L \frac{1}{L + 2x}\cdot dx = \ldots = \frac{M_v \cdot L}{2\pi G a^3 h}\cdot \frac{\ln 3}{2} \Longleftrightarrow \theta_{tot} = \frac{M_v \cdot L \cdot \ln 3}{4\pi G a^3 h}$$