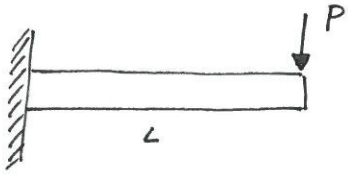
2.4.37 Konsolbalk

Givet



- $P = 1500$ N
- $L = 2$ m

Sökt

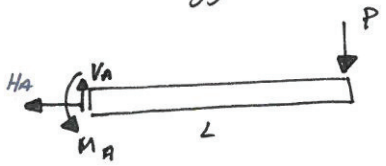
a) Diameter om tvärsnittet är cirkulärt, samt materialet är trä som tillåter normalspänning $\sigma_{till} = 20$ MPa

b) ... som i a) men med hänsyn till egenvikten $\rho_{trä} = 600$ kg/m³

c) Diameter om balken är av IPE-typ och materialet är stål med $\sigma_{till} = 100$ MPa och $\rho_{stål} = 7840$ kg/m³

Lösning

a) 1. Frilägg



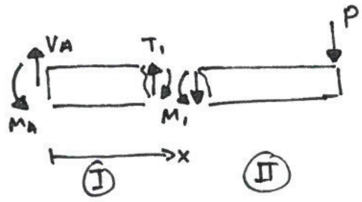
2. Jmv

$\uparrow: V_A - P = 0 \implies \underline{V_A = P}$

$\rightarrow: -H_A = 0 \implies \underline{H_A = 0}$

$\overset{\curvearrowleft}{A}: M_A - P \cdot L = 0 \implies \underline{M_A = P \cdot L}$

3. Snitta



4. Jmv

$\uparrow_I: V_A + T_1 = 0 \implies \underline{T_1 = -V_A = -P}$

$\overset{\curvearrowleft}{X}_I: M_A - V_A \cdot x - M_1 = 0 \implies M_1 = P \cdot L - P \cdot x = P(L-x)$

$\iff \underline{M_1 = P(L-x)}$

$\left(\overset{\curvearrowleft}{X}_{II}: M_1 - P(L-x) = 0 \implies \underline{M_1 = P(L-x)} \right)$

5. Normalspänning

$$\left[\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} \cdot z \right]$$

$$I_y = \{FS \text{ tab. } 30.1.3\} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Vi söker σ_{max} dvs $z \rightarrow z_{max}$ vilket fås för $z = \frac{D}{2}$ samt då M är max, vilket är i infästningen $(x=0)$

$$\implies M_{max} = M(x=0) = P \cdot L$$

$$\therefore \sigma_{max} \Big|_{\substack{z=\frac{D}{2} \\ x=0}} = 0 + \frac{P(L-0)}{\frac{\pi \cdot D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{32 PL}{\pi D^3}$$

Slutligen söker vi D så att:

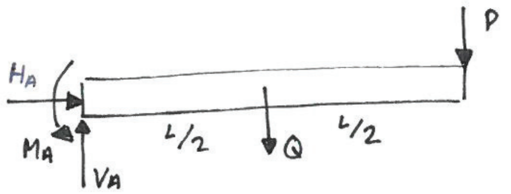
$$\sigma_{max} < \sigma_{till} \iff \frac{32 PL}{\pi D^3} < 20 \text{ MPa}$$

$\implies$ Numeriskt fås då att $\underline{D \geq 115.18 \text{ mm}}$ $(\sim 116 \text{mm})$

2.4.37 b) Med hänsyn till egenvikt

fortb. 1

1. Frilägg



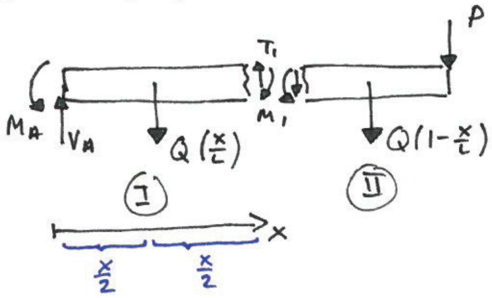
2. Jmv

$\uparrow$: $V_A - Q - P = 0 \Rightarrow \underline{V_A = P + Q}$

$\rightarrow$: $\underline{H_A = 0}$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: $M_A - \frac{L}{2}\cdot Q - L \cdot P = 0 \Rightarrow \underline{M_A = \frac{QL}{2} + PL}$

3. Snitta



4. Jmv

$\uparrow_I$: $V_A - Q\left(\frac{x}{L}\right) + T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = P + Q + Q\cdot\left(\frac{x}{L}\right)$

$\underline{T_1 = P + Q\left(1 + \frac{x}{L}\right)}$

$\overset{\curvearrowleft}{x}_I$: $M_A - V_A \cdot x + Q\cdot\left(\frac{x}{L}\right)\cdot\frac{x}{2} - M_1 = 0$

Obs Hävarm

$\Rightarrow \underline{M_1 = P(L-x) + Q\left(\frac{L}{2} - x + \frac{x^2}{2L}\right)}$ Dimoh

$\left(\overset{\curvearrowleft}{x}_{II} : M_1 - Q\left(1-\frac{x}{L}\right)\left(\frac{L-x}{2}\right) + P(L-x) = 0 \right.$

Obs. Hävarm för egenvikt del 2 utifrån "x"

$\left. \Rightarrow M_1 = P(L-x) + Q\left(\frac{L}{2} - x + \frac{x^2}{2L}\right) \right)$

5. Normalspänning

FS. 6.7. $\left[\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_y}\cdot z\right]$

$I_y = \{s. 344 \text{ tab } 30.1.3\} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

$z \rightarrow z_{max} = \frac{D}{2}$

$Q = \rho\cdot L\cdot A\cdot g$ där $A = \frac{\pi\cdot D^2}{4}$ och $g = 9.81$ m/s²

$\Rightarrow Q = 600\cdot 2\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}1152^2}{4}\cdot 9.81 \simeq 123$ N (~124 N om D = 116 mm)

M = M(x) ... vart är M störst? Vid infästningen! Dvs x = 0

$\Rightarrow M_{max} = M(x=0) = M_A = \frac{QL}{2} + PL$

$\Rightarrow \sigma_{max}\Big|_{\substack{x=0 \\ z=z_{max}}} = 0 + \frac{M_A}{I_y}\cdot z_{max} = \frac{\frac{QL}{2}+PL}{\frac{\pi D^4}{64}}\cdot\frac{D}{2} = \left\{\begin{matrix}\text{Sätt in} \\ \text{värden} \\ \text{för numeriskt} \\ \text{svar}\end{matrix}\right\} \simeq 21.6$ MPa

21.2 om D = 116 mm

Dvs med hänsyn till egenvikt så ökade normalspänningen i balken över kritiskt värde (20 MPa)

$\Rightarrow$ D måste ökas!

Genom att lösa $\frac{\frac{QL}{2}+PL}{\frac{\pi D^4}{64}}\cdot\frac{D}{2} \leq \sigma_{till}$ fås att $\underline{D \geq 116.7 \text{ mm}}$

(dvs $D \geq$ 117 mm)

2.4.37
forts. 2

c) IPE-balk ... vilken klassning krävs för att uppfylla villkoret σ_{till} ?

- IPE-klassningar se s. 351 i FS.

- Eftersom det är ren böjning kan vi antingen lösa genom FS. 6.7 som i b) alt. direkt använda FS. 6.8 eftersom vi söker σ_{max}

$$\Longrightarrow \text{FS. 6.8} \quad |\sigma(x)|_{max} = \frac{|M(x)|}{I(x)} \cdot |z|_{max} = \frac{|M(x)|}{W_b(x)}$$

$W_b(x)$ är det elastiska böjmotståndet och är alltså en geometrisk funktion $\longrightarrow$ det är W_b vi ska dimensionera!

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_b} \leq \sigma_{till}$$

i) Utan hänsyn till egenvikt dvs $M = P \cdot L$

$$\Longrightarrow W_b \geq \frac{M}{\sigma_{till}} = \frac{P \cdot L}{\sigma_{till}} = \frac{1500 \cdot 2}{100 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-4}\ m^3 = 30 \cdot 10^3\ mm^3$$

$\Longrightarrow$ Tab. 30.5 $\Longrightarrow$ vi behöver IPE 100-klassning $(W_y = 34.2 \cdot 10^3\, mm^3)$

Obs. $A = 1032\ mm^2$ för IPE100

ii) Med hänsyn till egenvikt dvs $M = \frac{QL}{2} + PL$

$$\Longrightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{W_b} = \frac{\frac{QL}{2} + PL}{W_b} \leq \sigma_{till}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\frac{(\rho_{stål} \cdot A \cdot L \cdot g) \cdot L}{2} + P \cdot L}{W_b} = \frac{\frac{7840 \cdot 0.001032 \cdot 2 \cdot 9.8 \cdot 2}{2} + 1500 \cdot 2}{3.42 \cdot 10^{-4}} \simeq 88,2\ MPa$$

Dvs $\sigma_{max} = 88.2$ vilket är mindre än tillåtna 100 MPa

$\Longrightarrow$ IPE100-klassning gäller!