

1.1.8

Givet

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 60 \\ 0 & 80 & 40 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix}_{xyz} \text{ MPa}$$

INGEN BILD

Sökt

Huvudspänningarna $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Lösning

Finn huvudspänningarna genom att lösa egenvärdesproblemet.

{FS 1.11}

$$\det(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 120 & 0 & 60 \\ 0 & 80 & 40 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 120 - \sigma & 0 & 60 \\ 0 & 80 - \sigma & 40 \\ 60 & 40 & 50 - \sigma \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(120 - \sigma)[(80 - \sigma)(50 - \sigma) - 40^2] + 0 \cdot (-[0 - (50 - \sigma)] + [40 \cdot 60]) + 60 \cdot ([0 \cdot 40] - (80 - \sigma) \cdot 60) = 0$$

$$(120 - \sigma)[(80 - \sigma)(50 - \sigma) - 40^2] + 60 \cdot (-(80 - \sigma) \cdot 60) = 0$$

$$-\sigma^3 + 250\sigma^2 - 19600\sigma + 480000 - 192000 + 1600\sigma + 3600\sigma - 280000 = 0$$

$$-\sigma^3 + 250\sigma^2 - 14400\sigma = 0$$

Enkelt att hitta en rot

$$\sigma_A = 0$$

Lös resterande polynom med PQ formeln

$$-\sigma^2 + 250\sigma - 14400 = 0$$

$$\sigma_{B,C} = \frac{-250 \pm \sqrt{250^2 - 4 \cdot 14400}}{-2}$$

$$\sigma_{B,C} = \frac{-250 \pm 70}{-2}$$

$$\sigma_B = \frac{-250 + 70}{-2} = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{-250 - 70}{-2} = 160 \text{ MPa}$$

Ordna dem i storleksordning

$$\sigma_1 = 160 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$