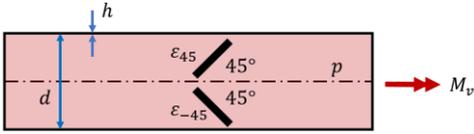


2.9.6



Givet
Tunnväggig cylindrisk behållare
Medeldiameter $d = 50$ mm
Vägg tjocklek $h = 2$ mm
 $E = 200$ GPa
 $\nu = 0.3$
 $\epsilon_{45} = 5 \cdot 10^{-5}$
 $\epsilon_{-45} = 2 \cdot 10^{-5}$

Sökt
 p och M_v

Lösning

Börja med att bestämma spänningstillståndet med hjälp av ångpanneformlerna

{FS 7.31}	$\sigma_\varphi = \frac{pa}{h}, \quad \sigma_z = \frac{pa}{2h}, \quad \sigma_r \approx 0$
-----------	---

Lägg till bidraget från vridmomentet

{FS 6.76}	$\tau_{z\varphi, max} = \frac{M_v}{W_v}$
{FS 6.81}	$W_v = 2\pi a^2 t$

Sätt in i spänningstensorn

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa}{h} & \frac{M_v}{2\pi a^2 h} \\ 0 & \frac{M_v}{2\pi a^2 t} & \frac{pa}{2h} \end{bmatrix}_{r\varphi z}$$

Vi kan omvandla spänningarna till töjningar med hjälp av Hookes lag. Eftersom en rad+kolumn endast innehåller nollor är systemet plant i spänning.

{FS 3.4}

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_\varphi)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\varphi + \sigma_z)$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\frac{pa}{h} - \nu\frac{pa}{2h}\right)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{pa}{Eh}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\frac{pa}{2h} - \nu\frac{pa}{h}\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{pa}{Eh}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu}{E}\left(\frac{pa}{h} + \frac{pa}{2h}\right)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{3\nu pa}{2Eh}$$

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{M_\nu}{2\pi a^2 h \left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right)} = \frac{M_\nu(1+\nu)}{\pi a^2 h E}$$

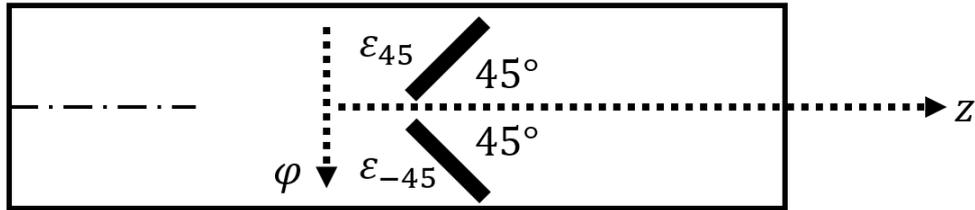
Nu kan vi använda de uppmätta värdena för att förhoppningsvis bestämma M_ν och p .

{FS 2.21}

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_y \sin^2 \varphi + \gamma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

{FS 2.22}

$$\gamma(\varphi) = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi + \gamma_{xy} \cos 2\varphi$$



Vi har att

$$\begin{aligned}\varepsilon(45^\circ) &= \varepsilon_{-45} = \varepsilon_\varphi \left(\frac{1}{2}\right) + \varepsilon_z \left(\frac{1}{2}\right) + \gamma_{xy} \left(\frac{1}{2}\right) \\ 2\varepsilon_{-45} &= \frac{pa}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{pa}{Eh} \left(\frac{1}{2} - \nu\right) + \frac{M_\nu(1+\nu)}{\pi a^2 h E} \\ 2\varepsilon_{-45} E h &= pa \left(1 - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} - \nu\right) + \frac{M_\nu(1+\nu)}{\pi a^2} \\ 2\varepsilon_{-45} E h &= pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right) + \frac{M_\nu(1+\nu)}{\pi a^2} \\ M_\nu &= \frac{\pi a^2}{1+\nu} \left[2\varepsilon_{-45} E h - pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Stoppa in i det andra sambandet

$$\begin{aligned}\varepsilon(90 + 45^\circ) &= \varepsilon_{45} = \varepsilon_\varphi \left(\frac{1}{2}\right) + \varepsilon_z \left(\frac{1}{2}\right) - \gamma_{xy} \left(\frac{1}{2}\right) \\ 2\varepsilon_{45} &= \frac{pa}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{pa}{Eh} \left(\frac{1}{2} - \nu\right) - \frac{M_\nu(1+\nu)}{\pi a^2 h E} \\ 2\varepsilon_{45} &= \frac{pa}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + \frac{pa}{Eh} \left(\frac{1}{2} - \nu\right) - \left(\frac{\pi a^2}{1+\nu} \left[2\varepsilon_{-45} E h - pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right)\right]\right) \frac{(1+\nu)}{\pi a^2 h E} \\ h E \cdot 2\varepsilon_{45} &= \frac{pa}{Eh} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right) - \left(\frac{\pi a^2}{1+\nu} \left[2\varepsilon_{-45} E h - pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right)\right]\right) \frac{(1+\nu)}{\pi a^2} \\ 2\varepsilon_{45} h E &= pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right) - 2\varepsilon_{-45} E h + pa \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2}\right) \\ 2(\varepsilon_{-45} + \varepsilon_{45}) h E &= 3pa(1 - \nu) \\ p &= \frac{2(\varepsilon_{-45} + \varepsilon_{45}) h E}{3a(1 - \nu)}\end{aligned}$$

Sätt in numeriska värden

$$p = \frac{2(5 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-5}) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^9}{3 \cdot 25 \cdot 10^{-3}(1 - 0.3)}$$

$$p = 4.57 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Återsubstituera för att hitta M_v

$$M_v = \frac{\pi a^2}{1 + \nu} \left[2\varepsilon_{-45} E h - p a \left(\frac{3}{2} - \frac{3\nu}{2} \right) \right]$$

$$M_v = -42.3 \text{ Nm}$$