

**Tentamen i FEM för ingenjörstillämpningar (SE1025) den 12 mars 2009 kl. 8-13.**

**Resultat** kommer att finnas tillgängligt senast den 2 april. Klagomål på rättningen skall vara framförda senast en månad därefter.

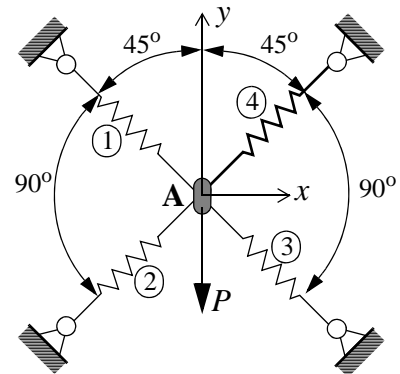
**OBS!** Tentand är skyldig att visa legitimation plus kvitto på erlagd kåravgift. Skriv endast på en sida av bladet. Skriv tydligt namn och personnummer på varje blad. Lösningar som är otydliga och svåra att följa kommer inte att bedömmas.

**Hjälpmedel:** Formelsamling i Hållfasthetslära, TEFYMA, BETA och räknedosa.

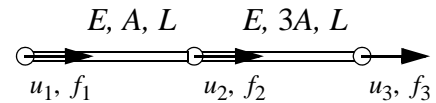
**Examinator:** Jonas Faleskog, tel. 790 8977.

**Betygsgränser:** F(underkänd)  $p \leq 10$ ; FX(möjlighet till kompletteringstentamen)  $p \geq 11$ ; E  $p \geq 13$ ; D  $p \geq 15$ ; C  $p \geq 17$ ; B  $p \geq 20$ ; A  $p \geq 23$ , där ( $p = \text{tenamen} + \text{bonus}$ ).

**1.** [4 poäng] En maskindel (A i figuren till höger) är upphängd i fyra fjädrar. Fjädrarna 1, 2 och 3 har alla fjäderkonstanten  $k_0$ . Fjäder 4 har fjäderkonstanten  $\eta k_0$ , där  $\eta$  är en dimensionslös konstant. Maskindelen belastas av kraften  $P$ , se figuren till höger. Bestäm  $\eta$  så att maskindelen vid belastning rör sig utmed linjen  $y = -5x$ .



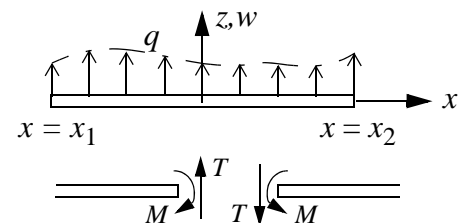
**2.** [3 poäng] Ett linjärelastiskt system består av två stänger, där elasticitetsmodulen, tvärsnittsarean och längden för respektive stång framgår av figuren till höger. Ställ upp den elastiska energin för systemet,  $W = W(u_1, u_2, u_3)$  (OBS! inte den kompletterade elastiska energin). Ta sedan fram relationen mellan krafter och förskjutningar på styvhetsform m.h.a. av lämplig sats av Castigliano, samt bestäm stängernas normalkrafter för fallet  $u_2 = \delta$ ,  $u_1 = u_3 = 0$ .



**3.** Svag form och virtuella arbetets princip är ekvivalenta i solidmekaniska problem och är båda uttryck för jämvikt. För Euler-Bernoullis balkteori ges den svaga formen enligt

$$\int_{x_1}^{x_2} v'' EI w'' dx = [vT]_{x_1}^{x_2} - [v'M]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v q dx,$$

där  $v = v(x)$  är en godtycklig viktfunction,  $E$  elasticitetsmodulen,  $I$  yttröghetsmomentet och övriga storheter framgår av figuren ovan till höger.

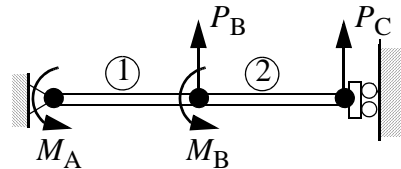
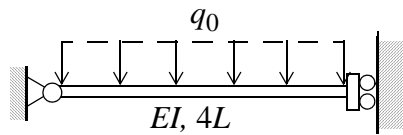


(a) [3 poäng] Härled motsvarande uttryck med hjälp av virtuella arbetets princip. Utgå ifrån det inre virtuella arbetet givet som

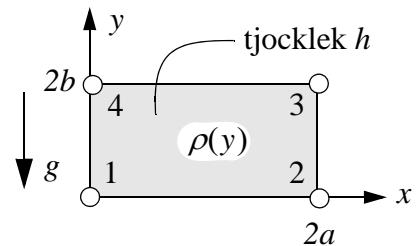
$$\delta W^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \int_A \delta \epsilon \sigma dA dx,$$

där  $\delta \epsilon$  är den virtuella töjning som är kompatibel med den virtuella förskjutningen  $\delta w$ ,  $\sigma$  är normalspänningen i  $x$ -led och  $A$  balkens tvärsnittsarea. Här måste sambanden  $\epsilon = -zw''$  (kompatibilitet) och  $\sigma = E\epsilon$  (konstitutiv Ek.) utnyttjas. Uttrycket för det yttre virtuella arbetet,  $\delta W^{(e)}$  erhålls sedan genom att relationen  $M = -EIw''$  och jämviktssambanden  $q = -T'$  och  $T = M'$  utnyttjas.

- (b) [2 poäng] Ta fram FEM-ekvationen (anv. Galerkins metod) till den svaga formen ovan för ett element, d.v.s. identifiera storheterna i ekvationen  $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$ .
- (c) [2 poäng] I en tillämpning enligt figuren nedan till vänster belastas en balk med en jämnt utbredd kraft per längdenhet  $q_0$ . Figuren nedan till höger visar en FEM-modell av balken bestående av två stycken 2-noders balkelement av lika längd. Bestäm  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $P_B$  och  $P_C$ , så att de på ett ekvivalent sätt beskriver den utbredda lasten i figuren till vänster.

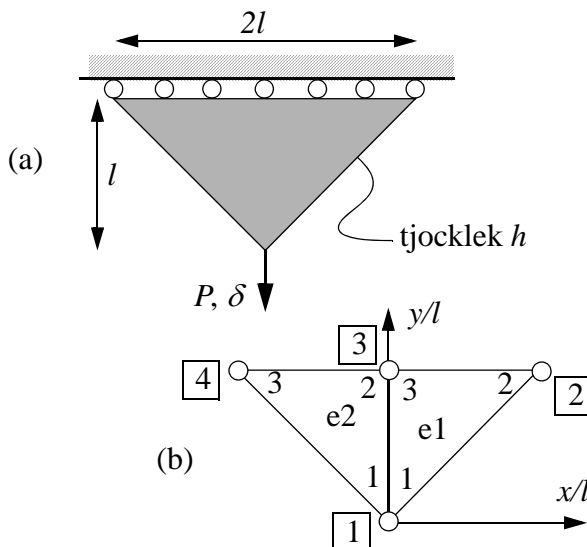


**4.** [4 poäng] En rektangulär plåt belastas av sin egentyngd enligt figuren till höger, där  $g$  är tyngdaccelerationen. Densiteten i plåten varierar enligt  $\rho = \rho_0[1 - y/(4b)]$ . Plåten modelleras med ett plant bi-linjärt element. Bestäm egentyngdens bidrag till elementlastvektorns komponenter tillhörande nod 3, där integralen skall beräknas numeriskt med Gauss-kvadratur. Välj så många integrationspunkter som behövs för exakt utvärdering av integralen. *Ledning: om  $m$  integrationspunkter används, kan ett polynom av gradtal  $2m - 1$  integreras exakt.*



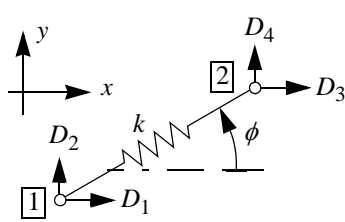
**5.** En triangelformad plåt enligt figur (a) nedan belastas av en punktkraft  $P$  med  $\delta$  som den resulterande förskjutningen. Plåtens övre del kan glida i horisontell led, men inte förskjutas i vertikalled. Materialet är isotropt linjärt elastiskt med elasticitetsmodulen  $E$  och Poisons tal  $\nu = 0.30$ . En relativt grov FEM modell av hela plåten bestående av endast två linjära triangelement (plan spänning) kan ses i figur (b). Elementens styvhetsmatriser är givna i figur (c) nedan.

- (a) [2 poäng] Ett elements förskjutning i t.ex.  $x$ -led kan skrivas som  $u = c_0 + c_1x/l + c_2y/l$ . Betrakta element 1 och bestäm koefficienterna  $c_0$ ,  $c_1$  och  $c_2$  som funktion av elementets nodförskjutningar i  $x$ -led ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ) och identifiera elementets formfunktioner.
- (b) [3 poäng] Bestäm styvheten i lastangreppspunkten,  $k = P/\delta$ . Notera att beräkningen underlättas avsevärt om geometriens symmetriegenskaper utnyttjas, t.ex. räcker det med att analysera en "symmetrihalva" av plåten.
- (c) [2 poäng] Beräkna de normaltöjningar som uppstår i element 1 och element 2.



$$(c) \quad \mathbf{k}_1 = \frac{Eh}{182} \begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & -35 & -35 & 35 \\ 0 & 100 & -30 & 0 & 30 & -100 \\ 0 & -30 & 100 & 0 & -100 & 30 \\ -35 & 0 & 0 & 35 & 35 & -35 \\ -35 & 30 & -100 & 35 & 135 & -65 \\ 35 & -100 & 30 & -35 & -65 & 135 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{Eh}{182} \begin{bmatrix} 35 & 0 & -35 & -35 & 0 & 35 \\ 0 & 100 & -30 & -100 & 30 & 0 \\ -35 & -30 & 135 & 65 & -100 & -35 \\ -35 & -100 & 65 & 135 & -30 & -35 \\ 0 & 30 & -100 & -30 & 100 & 0 \\ 35 & 0 & -35 & -35 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

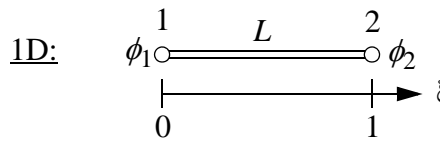
**FORMELBLAD (komplement till kap. 21. i Formelsamling i Hållfasthetslära)****GLOBAL BESKRIVNING FÖR ENDIMENSIONELLA ELEMENT**

$$\mathbf{K}_e = k \begin{bmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

$$\text{där } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \phi \\ s = \sin \phi \end{matrix}$$

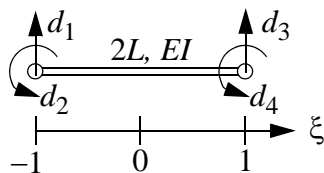
$$\text{alternativt } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_{12}^2 & l_{12}m_{12} \\ l_{12}m_{12} & m_{12}^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} l_{12} = \cos \phi_x = (x_2 - x_1)/L \\ m_{12} = \cos \phi_y = (y_2 - y_1)/L \\ L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{matrix}$$

**OLIKA FINITA ELEMENT**

**1D:**   $\phi(\xi) = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} N_1 = 1 - \xi \\ N_2 = \xi \end{matrix} \quad \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{N}}{dx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

**Balkelement:**

**Utböjning:**  $w(\xi) = N_1 d_1 + N_2 d_2 + N_3 d_3 + N_4 d_4 = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$ ,  $\mathbf{B} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{d\xi^2}$



$$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$$

$$N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$$

$$N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$\int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} L d\xi = \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \left( \alpha + \beta \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \right) L d\xi = L\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix} + \frac{L\beta}{30} \begin{bmatrix} 9 \\ 4L \\ 21 \\ -6L \end{bmatrix}$$

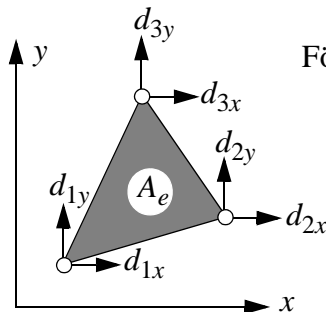
**Numerisk integration (Gauss-kvadratur):**

$$I = \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{m_i} F(\xi_i) w_i \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} F(\xi_i, \eta_j) w_i w_j$$

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{m_k} F(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) w_i w_j w_k$$

**Table 7.1.** Gauss integration points and weight coefficients

$m$	$\xi_j$	$w_j$	Accuracy $n$
1	0	2	1
2	$-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$	1, 1	3
3	$-\sqrt{0.6}, 0, \sqrt{0.6}$	5/9, 8/9, 5/9	5
4	$-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136$	0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855	7
5	$-0.906180, -0.538469, 0, 0.538469, 0.906180$	0.236927, 0.478629, 0.568889, 0.478629, 0.236927	9
6	$-0.932470, -0.661209, -0.238619, 0.238619, 0.661209, 0.932470$	0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324	11

Plana element (2D):*3-sidigt triangelement:*

Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{d}_e = \begin{bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{3x} \\ d_{3y} \end{bmatrix}$$

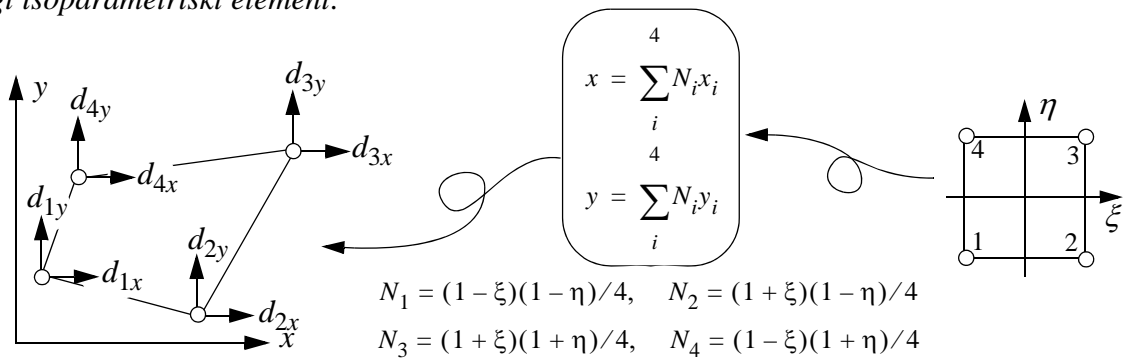
$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$$

Töjningar:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

*4-sidigt isoparametriskt element:*

Förskjutningar:

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$$

Töjningar:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4] \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

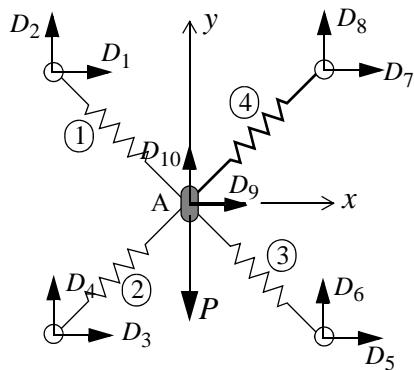
där  $\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta \end{bmatrix}$

Spänningar:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \epsilon \quad \mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.S)} \quad \mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ (P.D)}$$

$$\text{FEM Ekv. (ett element):} \quad \left[ \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{d}_e = \left[ \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} dV \right] \quad \mathbf{t} = \text{spänningsvektor} \quad \mathbf{K} = \text{volymkraft}$$

## LÖSNINGSFÖRSLAG: FEM FÖR INGENJÖRSTILLÄMPNINGAR, 12 MARS, 2009

**1.**Randvillkor:  $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = 0$ 

$$F_{10} = -P$$

Elementstyvhetsmatriser:  $\mathbf{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i & -\mathbf{a}_i \\ -\mathbf{a}_i & \mathbf{a}_i \end{bmatrix}$ 

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_0, \quad k_4 = \eta k_0$$

$$\text{Red. Ekvationssyst. (Ekv. 9, 10): } k_0 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \eta \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \eta & \eta - 1 \\ \eta - 1 & 3 + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$\text{Villkoret } D_{10} = -5D_9 \text{ insatt i Ek. (9) ger: } (3 + \eta - 5(\eta - 1))D_9 = 0 \Rightarrow \eta = 2$$

**2.**

$$\text{Elastisk energi: } W = \frac{k}{2}(u_2 - u_1)^2 + \frac{3k}{2}(u_3 - u_2)^2 \quad \text{där } k = \frac{EA}{L}$$

$$\text{Castiglianos 1:a sats ger Ek. syst.: } f_i = \frac{\partial W}{\partial u_i} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{För specialfallet } u_2 = \delta, u_1 = u_3 = 0 \text{ fås: } f_1 = -k\delta, f_2 = 4k\delta, f_3 = -3k\delta$$

$$\text{Normalkrafterna (snitta elementen): } f_1 = -k\delta \rightarrow \text{Element 1} \rightarrow N = -f_1 = k\delta$$

$$N = f_3 = -3k\delta \leftarrow \text{Element 2} \rightarrow f_3 = -3k\delta$$

**3(a).**

Virtuella arbetets princip—Euler Bernoulli balk:

$$\delta W^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \int_A \delta \varepsilon \sigma dA dx = \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon = -z \delta w'' \\ \sigma = -E z w'' \end{Bmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' E w'' \left( \int_A z^2 dA \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' EI w'' dx$$

$$M = -EI w'' \Rightarrow \delta W^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' (-M) dx = -[\delta w' M]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' M' dx = \begin{Bmatrix} M' = T \\ T' = T - q \end{Bmatrix} =$$

$$= -[\delta w' M]_{x_1}^{x_2} + [\delta w T]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta w (-q) dx$$

$$\text{Alltså, } \delta W^{(i)} = \delta W^{(e)} \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' EI w'' dx = [\delta w T]_{x_1}^{x_2} - [\delta w' M]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta w q dx$$

Identisk med svag form om  $\delta w = v$

**3(b).** Förskjutningsansats:  $w = \mathbf{N} \mathbf{d}_e$   $\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e$

Viktfunktion:  $v = \mathbf{N} \mathbf{b}_e = \mathbf{b}_e^T \mathbf{N}^T$   $\frac{d^2 v}{dx^2} = \mathbf{b}_e^T \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} = \mathbf{b}_e^T \mathbf{B}^T$

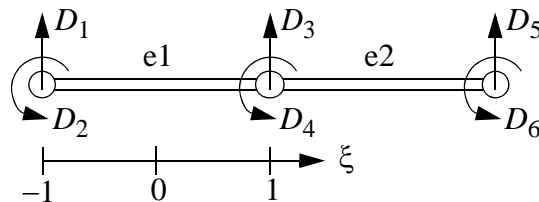
Insatt i svag form ger:

$$\underbrace{\mathbf{b}_e^T \left[ \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T E I \mathbf{B} dx \right]}_{\mathbf{k}_e} \mathbf{d}_e = \underbrace{\mathbf{b}_e^T \left[ \left[ \mathbf{N}^T T \right]_{x_1}^{x_2} - \left[ \frac{d\mathbf{N}^T}{dx} M \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{N}^T q dx \right]}_{\mathbf{f}_e}$$

men  $\mathbf{b}_e^T$   
är godtycklig  
 $\Rightarrow \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e$

**3(c).**

FEM - modell, balkelement ( $l_1 = l_2 = 2L$ ):



Formfunktioner:

$$N_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$$

$$N_2 = L(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$$

$$N_3 = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$$

$$N_4 = L(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)/4$$

Ekvivalenta nodkrafter från utbredd last ( $q(x) = -q_0$ ):

Utnyttja formelbladet!

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T q_0 L d\xi = -Lq_0 \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$$

Assemblering av elementlaster:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = -Lq_0 \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$$

Identifiering ger sedan att:

$$M_A = F_2 = -\frac{L^2 q_0}{3}, \quad P_B = F_3 = -2Lq_0, \quad M_B = F_4 = 0, \quad P_C = F_5 = -Lq_0$$

**4:**

Koordinat-transformation:  $\left. \begin{matrix} x = a(1 + \xi) \\ y = b(1 + \eta) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow |\mathbf{J}| = ab, \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{y}{4b}\right) = \rho_0 \left(\frac{3 - \eta}{4}\right)$

Bidrag från volymslast till elementlastvektorn:  $\mathbf{f}_b = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{f}_v |\mathbf{J}| h d\xi d\eta$  där  $\mathbf{f}_v = \rho_0 g \begin{bmatrix} 0 \\ -(3 - \eta)/4 \end{bmatrix}$

För nod 3 gäller:  $f_{3x} = 0, \quad f_{3y} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_3 \left( -\rho_0 g \left( \frac{3 - \eta}{4} \right) \right) ab h d\xi d\eta$  där  $N_3 = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$

$$\Rightarrow f_{3y} = -\rho_0 g ab h I \quad \text{där} \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad F(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi)(3 + 2\eta - \eta^2)}{16}$$

Gauss-kvadratur (1 pkt. i  $\xi$ -led och 2 pkt. i  $\eta$ -led ger exakt lösning):

$$\xi\text{-led: } \xi_1 = 0, w_{\xi_1} = 2 \quad \eta\text{-led: } \eta_1 = -1/\sqrt{3}, w_{\eta_1} = 1; \quad \eta_2 = 1/\sqrt{3}, w_{\eta_2} = 1$$

$$I = F(\xi_1, \eta_1) \cdot 2 \cdot 1 + F(\xi_1, \eta_2) \cdot 2 \cdot 1 = 2/3 \quad \Rightarrow \quad f_{3y} = -\frac{2}{3} \rho_0 g ab h$$

**5(a):**

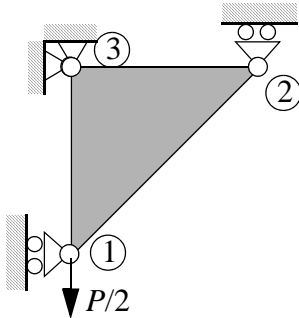
Linjär förskjutningsansats:  $u = c_0 + c_1 x/l + c_2 y/l$

Koefficienterna uttryckta i nodförskjutningar:

$$\left. \begin{aligned} u_1 = \{x=y=0\} &= c_0 \\ u_3 = \{x=0, y=l\} &= c_0 + c_2 \Rightarrow c_2 = u_3 - u_1 \\ u_2 = \{x=y=l\} &= c_0 + c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = u_2 - u_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u = \underbrace{\left(1 - \frac{y}{l}\right)}_{N_1} u_1 + \underbrace{\frac{x}{l}}_{N_2} u_2 + \underbrace{\left(\frac{y}{l} - \frac{x}{l}\right)}_{N_3} u_3$$

**5(b):**

Analysa t.ex. höger symmetrihalva:



Reducerat Ek. syst.

$$\frac{Eh}{182} \begin{bmatrix} 100 & -30 \\ -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1y} \\ d_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_{1y} \\ d_{2x} \end{bmatrix} = -\frac{P}{Eh} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \{\delta = -d_{1y}\} = Eh$$

**5(c):**

Töjning i element 1:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e \quad \text{där} \quad \mathbf{d}_e = -\frac{P}{Eh} [0 \ 1 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{P}{Elh} \begin{bmatrix} -0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alltså, normaltöjningarna i element 1 är:

$$\varepsilon_x = -0.3 \frac{P}{Elh}, \quad \varepsilon_y = \frac{P}{Elh},$$

vilket p.g.a. symmetri även är normaltöjningarna i element 2.