

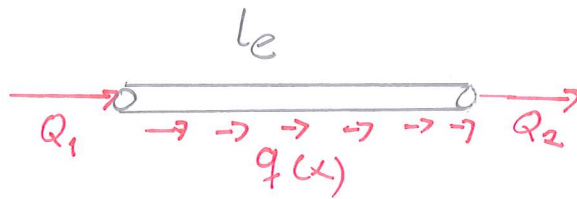
FEM-ekv för ett element med temperatur

$$\left[\int_{l_e} \underline{B}^T k A \underline{B} dx + \int_{l_e} \underline{N}^T h P \underline{N} dx \right] \underline{T}_e =$$

\uparrow värmeledning \uparrow konvektion

$$= \underbrace{\left[\underline{N}^T (-Q) \right]_{x_1}^{x_2}}_{\text{Värme källa i nod eller värme flöde i rand}} + \int_{l_e} \underline{N}^T q A dx + \int_{l_e} \underline{N}^T h P T_\infty dx$$

\uparrow Värme källa \uparrow konvektion



7.2

$$T = -5^{\circ}\text{C}$$



$$L_1 = 2\text{ cm} \quad L_2 = 5\text{ cm}$$

Bestäm Temperaturfördelningen

$$T = 20^{\circ}\text{C}$$

vid vänstra väggen konvektion till omgivningen
 $(T = -5^{\circ}\text{C}) \quad h = 0.1 \text{ W/cm}^2/^{\circ}\text{C}$

Högra väggen: konst temperatur

Värmekonduktiviteten för materialen

$$k_1 = 0.2 \text{ W/cm/^{\circ}C} \quad k_2 = 0.06 \text{ W/cm/^{\circ}C}$$

FEM för temperaturproblem i 1D
 Linjär ansats för temperaturfördelningen

$$T(x) = \underbrace{T_e}_{\substack{\uparrow \\ \text{nod temp}}} \underbrace{N}_{\substack{\uparrow \\ \text{Formfunktion}}}$$

FEM-ekv för värmeproblem

$$[K_{vl} + K_k + K_r] \underline{T_e} = \underline{f_e} + \underline{f_b}$$

$$\underline{K_e} \underline{T_e} = \underline{f_e}$$

Styvhet matriserna

\underline{K}_{vl} värmeledning

$$\underline{K}_{vl} = \int_0^1 \underline{B}^T k A \underline{B} l_e d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{linjär} \\ \text{ansats} \end{array} \right\} = \frac{k A}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

\underline{K}_k konvektion längs med problemet (stängens längd etc)

$$\underline{K}_k = \int_0^1 \underline{N}^T h P \underline{N} l_e d\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{linjär} \\ \text{ansats} \end{array} \right\} = \frac{h l_e P}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

h - värmeövergångstal

P - omkrets av stängen

$\underline{K}_k = \underline{0}$ i detta fall

Randvillkoret vid $x=0$ konvektion vid randen

$$Q = h A (T_1 - T_\infty)$$

Randvillkoret blir (från FEM-ekv)

$$\left[\underline{N}^T (-Q) \right]_{x_1}^{x_2} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ -Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h A (T_1 - T_\infty) \\ -Q_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} h A T_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h A T_\infty \\ -Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h A T_\infty \\ -Q_2 \end{bmatrix}$$

För element 1 blir totala styvhetsmatrisen

$$\underline{K}_e^{(1)} = \frac{k_1 A}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hA & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= A \begin{bmatrix} \frac{k_1}{l_1} + h & -\frac{k_1}{l_1} \\ -\frac{k_1}{l_1} & \frac{k_1}{l_1} \end{bmatrix}$$

För element 2

$$\underline{K}_e^{(2)} = A \begin{bmatrix} \frac{k_2}{l_2} & -k_2/l_2 \\ -k_2/l_2 & k_2/l_2 \end{bmatrix}$$

Totala assemblerade systemet

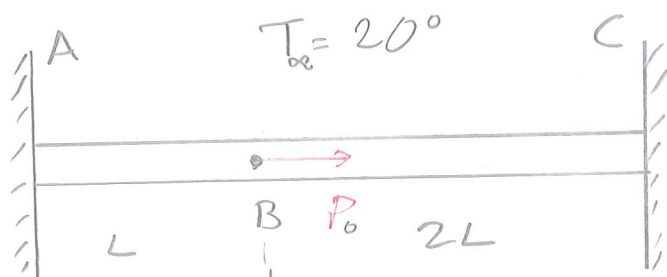
$$A \begin{bmatrix} k_1/l_1 + h & -k_1/l_1 & 0 \\ -k_1/l_1 & k_1/l_1 + k_2/l_2 & -k_2/l_2 \\ 0 & -k_2/l_2 & k_2/l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 = 20^\circ \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} h T_\infty \\ 0 \\ Q_3/A \end{bmatrix}$$

Lös delsystemet med T_1 och T_2

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} 2.58^\circ \text{C} \\ -0.161^\circ \text{C} \end{bmatrix}$$

$$Q_3/A = 0.242 \text{ W/cm}^2$$

7.3



Kopparstäng: dimensioner $b \times b$
 I punkten B påverkas stängen av en punktlast P_0
 och temp $T_B = 100^\circ\text{C}$

Randen A: $T = 20^\circ\text{C}$

Randen C: Isolerad inget värmeutbyte med omgivningen

Använd FEM för att bestämma temperaturfördelningen
 för skjutningar och spänningar. Använd 2 element
 per del. Genomför analysen i två steg

a) Temperatur

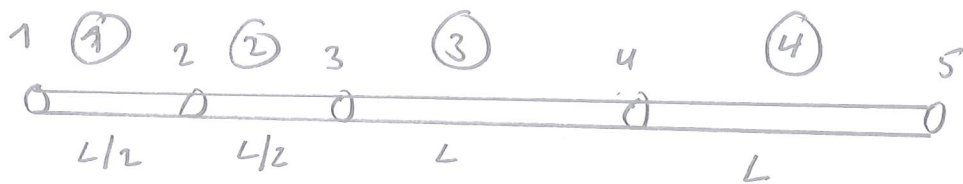
b) Mekaniik

Data $L = 10\text{ cm}$ $b = 1\text{ cm}$ $k = 3.9\text{ W/cm/}^\circ\text{C}$

$h = 0.01\text{ W/cm}^2/\text{C}$ $E = 125\text{ GPa}$

$\alpha = 1.8 \cdot 10^{-5}$ $P_0 = 2\text{ kN}$

Indelning i 4 element



För element 1 o 2 $L_e = L/2$

$$\underline{K}_e = \frac{2kb^2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{h(L/2) \cdot 4b}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.847 & -0.747 \\ -0.747 & 0.847 \end{bmatrix} \text{ [W/}^\circ\text{C]}$$

lastvektor pga konvektion

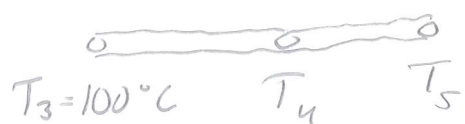
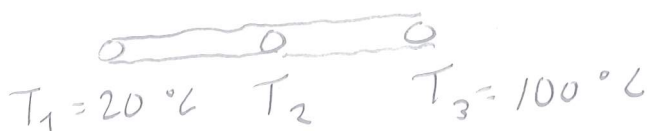
$$\int_{l_e} \underline{N}^T h P T_\infty dx = \int_0^1 \underline{N}^T h P T_\infty \frac{L}{2} d\xi = \frac{h P T_\infty L}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ [W]}$$

Element 3 o 4 $L_e = L$

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} 0.523 & -0.323 \\ -0.323 & 0.523 \end{bmatrix} \text{ [W/}^\circ\text{C]}$$

$$\int_{l_e} \underline{N}^T h P T_\infty dx = \dots = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ [W]}$$

I och med att T_3 är given kan problemet delas upp i 2 halv



Vänstra halvan (element 1 o 2) efter assembling

$$\begin{bmatrix} 0.847 & -0.747 & 0 \\ -0.747 & 1.6933 & -0.747 \\ 0 & -0.747 & 0.847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 = 20^\circ\text{C} \\ T_2 \\ T_3 = 100^\circ\text{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + 2 [\text{W}] \\ 4 [\text{W}] \\ Q_3 + 2 [\text{W}] \end{bmatrix}$$

$$T_2 = 55.3^\circ\text{C}$$

Högra halvan (element 3 o 4)

$$\begin{bmatrix} 0.523 & -0.323 & 0 \\ -0.323 & 1.047 & -0.323 \\ 0 & -0.323 & 0.523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 = 100^\circ\text{C} \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_3 + 4 [\text{W}] \\ 8 [\text{W}] \\ 4 [\text{W}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.5^\circ\text{C} \\ 38.8^\circ\text{C} \end{bmatrix}$$

b) FEM - elv för termo-elastiskt material

$$\underbrace{\underline{K}_e \underline{d}_e = \underline{f}_s + \underline{f}_b}_{\text{"Som vanligt"}} + \underbrace{\underline{f}_T}_{\text{Temperaturlast}}$$

$$\underline{f}_T = \int_0^l \underline{B}^T E A \alpha \Delta T l_e d\xi$$

Temperaturfördelning i elementet

$$\Delta T(x) = \underline{N} \Delta \underline{T}_e$$

$$\underline{f}_T = \int_0^l \underline{B}^T E A \alpha \underline{N} \Delta \underline{T}_e l_e d\xi$$

med linjära formfunktioner

$$\underline{f}_T = EA\alpha \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix}}_N \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} d\xi =$$

$$= EA\alpha \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \end{bmatrix} = EA\alpha \underbrace{\frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2}}_{\text{medeltemperatur-}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ändringen i elementet

För varje element gäller

$$\underline{k}_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{f}_T = EA\alpha \overline{\Delta T}_i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\overline{\Delta T}_i$; medeltemperaturändringen för element (i)

För element 1 \circ 2

$$\underline{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

För element 3 \circ 4

$$\underline{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Det assemblade systemet blir

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1=0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5=0 \end{bmatrix} = EA\alpha \begin{bmatrix} -\bar{\Delta T}_1 \\ \bar{\Delta T}_1 - \bar{\Delta T}_2 \\ \bar{\Delta T}_2 - \bar{\Delta T}_3 \\ \bar{\Delta T}_3 - \bar{\Delta T}_4 \\ \bar{\Delta T}_4 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Delta T}_1 = \frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2} = \frac{(55.3^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) + (20^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{2}$$

osv

Lösning av delsystemet 3-5 ger

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.08 \\ 7.84 \\ 31.43 \end{bmatrix} \mu\text{m} \quad \begin{bmatrix} R_1 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7987 \\ -9487 \end{bmatrix} \text{N}$$

Spänningsberäkning för termo-elastiskt material

$$\sigma = E \varepsilon - E \alpha \Delta T = E \underbrace{\beta}_{\varepsilon} \underbrace{d\varepsilon}_{\Delta T} - E \alpha \Delta T$$

$$\sigma_1 = E \left[\frac{D_2 - D_1}{l_e^{(1)}} - \alpha \overline{\Delta T_1} \right] = -74.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = E \left[\frac{D_3 - D_2}{l_e^{(2)}} - \alpha \overline{\Delta T_2} \right] = -74.9 \text{ MPa}$$

P.S.S

$$\sigma_3 = -94.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = -94.9 \text{ MPa}$$