

Bestäm η så att A rör sig enligt $y = -5x$
 10 frihetsgrader RV ger att D_1 till $D_8 = 0$
 10×10 system men det reducerade blir

$$\begin{bmatrix} K_{9,9} & K_{9,10} \\ K_{10,9} & K_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

Elementstyvhetsmatriserna:

$$\underline{K}_i = k_i \begin{bmatrix} \underline{a}_i & -\underline{a}_i \\ -\underline{a}_i & \underline{a}_i \end{bmatrix} \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c = \cos \varphi \\ s = \sin \varphi \end{matrix}$$

För element 2 och 4 gäller $\varphi = 45^\circ$

$$\underline{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

För element 1 och 3 gäller $\varphi = -45^\circ$

$$\underline{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Den intressanta delen av ekvationssystemet blir

$$\left[k_0 (\underline{a}_1 + \underline{a}_2 + \underline{a}_3) + \eta k_0 \underline{a}_4 \right] \begin{bmatrix} D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$\frac{k_0}{2} \begin{bmatrix} 3+\eta & \eta-1 \\ \eta-1 & 3+\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_9 \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$(3+\eta) D_9 + (\eta-1) D_{10} = 0$$

$$\frac{D_{10}}{D_9} = - \frac{3+\eta}{\eta-1} = (-5) \quad \text{Från } y = -5x$$

$$5(\eta-1) = 3+\eta$$

$$4\eta = 8 \quad \underline{\underline{\eta = 2}}$$

3) För Euler-Bernoulli balk ges den sraga formen enligt

$$\int_{x_1}^{x_2} v^{(1)} EI w'' dx = [vT]_{x_1}^{x_2} - [v'M]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} vq dx$$

a) Härled uttrycket mha virtuella arbetets princip

$$\delta W^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \int_A \delta \epsilon \sigma dA dx$$

$\delta \epsilon$ den virtuella föjning som är kompatibel med den virtuella förskjutningen δw
Använd sambanden $\epsilon = -zw''$ kompatibilitet och $\sigma = E\epsilon$, konstitutiv elv.

Uttrycket för det yttre virtuella arbetet $\delta W^{(e)}$ erhålls genom att utnyttja

$M = -EI w''$ och jämviktssambanden

$q = -T'$ och $T = M'$

3]

Lösning:

Det inre virtuella arbetet

$$\delta W^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \int_A \delta \epsilon \sigma dA dx$$

med $\epsilon = -zw''$ fås $\sigma = -Ezw''$ och $\delta \epsilon = -z \delta w''$

$$\delta W^{(i)} = \int_{x_1}^{x_2} \int_A z \delta w'' \cdot Ezw'' dA dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} E \delta w'' w'' \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I} dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' EI w'' dx$$

Använd $M = -EIw''$ för att få det yttre virtuella arbetet

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta w'' EI w'' dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta w'' (-M) dx$$

Partialintegration

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta w''(-M) dx = \left[\delta w' M \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta w' \frac{dM}{dx} dx =$$

$$= \left\{ T = \frac{dM}{dx} \right\} = - \left[\delta w' M \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\delta w T \right]_{x_1}^{x_2} -$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \delta w \frac{dT}{dx} dx = \left\{ \frac{dT}{dx} - q \right\} =$$

$$= - \left[\delta w' M \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\delta w T \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta w q dx = \delta W^{(e)}$$

Alltså

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta w'' EI w'' dx = - \left[\delta w' M \right]_{x_1}^{x_2} + \left[\delta w T \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta w q dx$$

Identiskt med svag form om $v = \delta w$

b) Ta fram FEM-elur (anv. Galerkin)
 till den svaga formen $\underline{K}_e \underline{d}_e = \underline{f}_e$

Förskjutningsansats

$$w(x) = \underline{N} \underline{d}_e$$

$$w'' = \frac{d^2 \underline{N}}{dx^2} \underline{d}_e = \underline{B} \underline{d}_e$$

virtfkn enligt galerkin

$$v(x) = \underline{N} \underline{c} = \underline{c}^T \underline{N}^T$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \underline{c}^T \underline{B}^T$$

Insatt i svag form

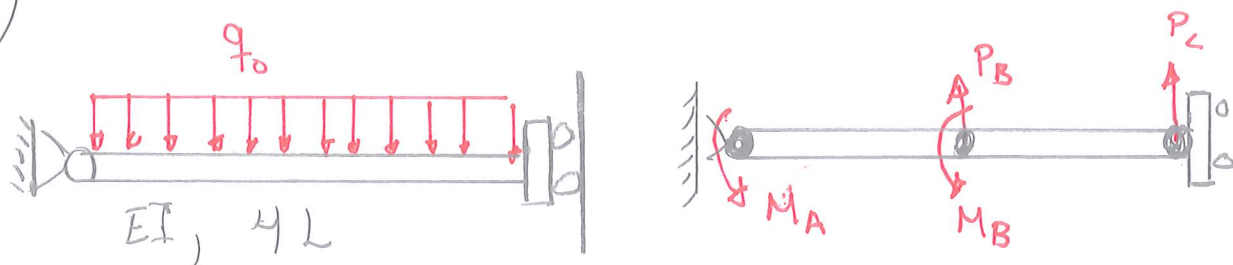
$$\int_{x_1}^{x_2} \underline{c}^T \underline{B}^T EI \underline{B} \underline{d}_e dx = \left[\underline{c}^T \underline{N}^T T \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\underline{c}^T \frac{d\underline{N}}{dx} M \right]_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \underline{c}^T \underline{N}^T q dx$$

\underline{c}^T godtycklig: alltså

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^T EI \underline{B} dx \underline{d}_e}_{\underline{K}_e} = \underbrace{\left[\underline{N}^T T \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{d\underline{N}}{dx} M \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \underline{N}^T q dx}_{\underline{f}_e}$$

c)



Bestäm M_A, M_B, P_B & P_C så att de på ett ekvivalent sätt beskriver lasten i figuren

Lösning: 2 balkelement 2 L långa vardera

Konsistenta lastvektorn för ett element
2L långt

$$\int_{-1}^1 \tilde{N}^T q L d\xi = \left\{ \text{från fs med } \alpha = q_0 \circ \beta = 0 \right\} =$$

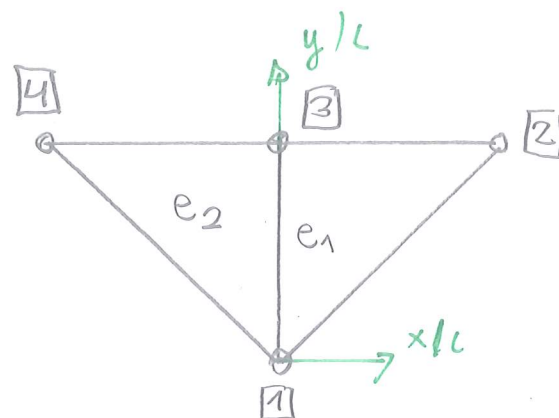
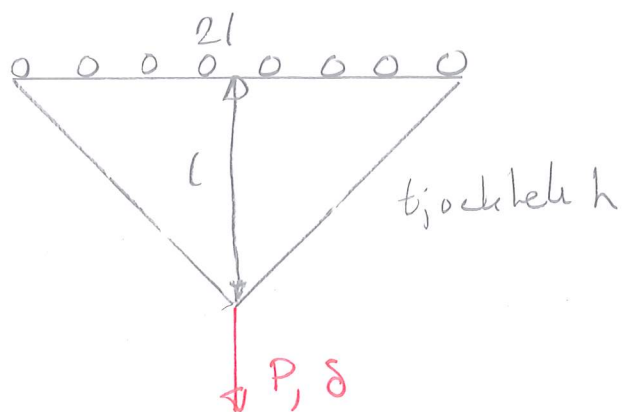
$$= Lq \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$$

Assemblering ger den totala lastvektorn

$$\tilde{F} = -Lq_0 \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 1+1 \\ -L/3+L/3 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix} = -Lq_0 \begin{bmatrix} 1 \\ L/3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -L/3 \end{bmatrix}$$

Identifiering ger $M_A = -L^2 q_0 / 3$ $P_B = -2Lq_0$
 $M_B = 0$ $P_C = -Lq_0$

51



E-modul E och $\nu = 0.3$ Plan spänning

a) Förskjutningen u_i i ett element kan skrivas som u_i i x-led

$$u = C_0 + C_1 \frac{x}{l} + C_2 \frac{y}{l}$$

Betrakta e_1 och bestäm koefficienterna som funktion av nodförskjutningarna i x-led u_1, u_2, u_3 och identifiera formfunktionerna

Nod	u	x/l	y/l
1	u_1	0	0
2	u_2	1	1
3	u_3	0	1

$$u_1 = C_0$$

$$u_2 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$u_3 = C_0 + C_2 \Rightarrow C_2 = u_3 - C_0 = u_3 - u_1$$

$$C_1 = u_2 - C_0 - C_2 = u_2 - u_1 - (u_3 - u_1) = u_2 - u_3$$

Insatt i uttrycket för u

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{L} + (u_3 - u_1) \frac{y}{L} =$$

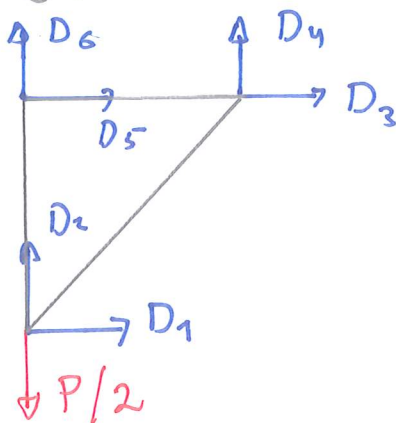
$$= \left(1 - \frac{y}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 + \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{L}\right) u_3$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{d}$$

$$N_1 = \left(1 - \frac{y}{L}\right) \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad N_3 = \frac{y}{L} - \frac{x}{L}$$

b) Bestäm styrheten i lastangreppspunkter
P/S. Utnyttja symmetri

Betrakta element ①



Symmetri ger att

$$D_1 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$$

Endast rad 0 kolumn 2 0
3 som är av intresse: k_1

Reducerade systemet

$$\frac{Eh}{182} \begin{bmatrix} 100 & -30 \\ -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rad 2 ger } 0.3D_2 = D_3$$

$$\text{Rad 1 } \frac{Eh}{182} [100D_2 - 30D_3] = -P/2$$

$$\frac{Eh}{182} [100D_2 - 0.3 \cdot 30D_2] = -P/2$$

$$\frac{Eh}{182} 91D_2 = -\frac{P}{2} \Rightarrow D_2 = -\frac{P}{Eh}$$

$$D_3 = -0.3 \frac{P}{Eh}$$

$$\delta = -D_2 \Rightarrow k = P/\delta = Eh$$

- c) Beräkna de normaltöjningar som uppstår i element 1 och 2
Töjningarna lika i elem 1 & 2 pga symmetri

Töjningarna ges av

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \underline{\underline{d}}_e$$

$$\underline{\underline{B}} = [\underline{\underline{B}}_1 \quad \underline{\underline{B}}_2 \quad \underline{\underline{B}}_3] \quad \underline{\underline{d}}_e = [0 \ D_2 \ D_3, 0 \ 0 \ 0]^T$$

Alltså behövs bara $\underline{\underline{B}}_1$ och $\underline{\underline{B}}_2$

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{dy} \\ \frac{dN_1}{dy} & \frac{dN_1}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{dN_2}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_2}{dy} \\ \frac{dN_2}{dy} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_{de} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} D_3 \\ -D_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3P/EhL \\ P/EhL \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alltså Normalförlängarna

$$\epsilon_{xx} = \frac{-0.3P}{EhL}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{P}{EhL}$$