Spänningar

Normalspänning $\sigma = \frac{N}{A}$ Mäts ofta i MPa

Skjuvspänning $\tau = \frac{T}{A}$

Deformationer

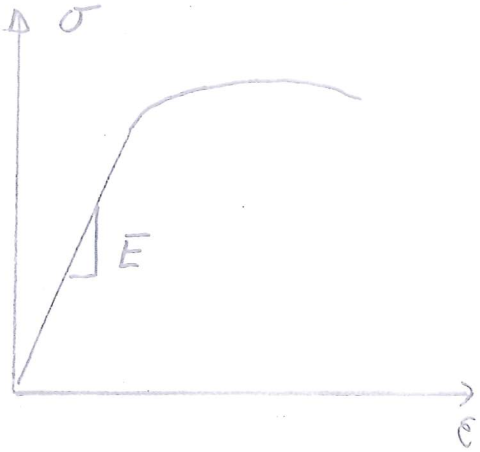
Förskjutning $u(x)$ Hur mycket en punkt flyttas

Töjning $\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$

Axialbelastad stång 

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

Konstitutiv lag (Material)



linjärt samband: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

E – elasticitetsmodul

$E_{stål} \approx 200$ GPa

$E_{Al} \approx 70$ GPa

Differentialekv. för stång

Jämvikt

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0$$ K_x – Volymkraft

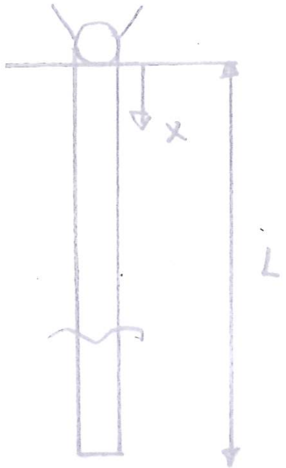
Förskjutning

$$\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) + K_x A = 0$$

Om $EA = \text{konst}$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{K_x}{E} = 0$$

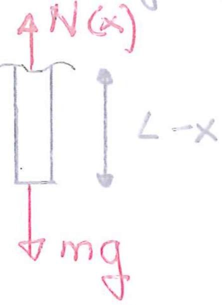
2.1.1



Stång med längd L, tyngd Q och tvärsnittsarea A

Bestäm normalspänningen som funktion av x

Lösning 1: snitta vid godtyckligt x



$$N(x) = mg$$

$$m = \frac{Q}{L}(L-x)$$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{Q}{LA}(L-x) = \frac{Q}{A}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

Lösning 2: Differentialekvation för normalkraft

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0$$

K_x - volymkraft $\quad K_x = Q/LA.$

Integation av diff. ekv ger

$$N(x) = -K_x A x + C$$

Randvillkor $\quad N(0) = Q \Rightarrow C = Q$

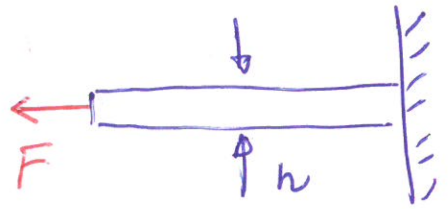
$$N(x) = Q\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

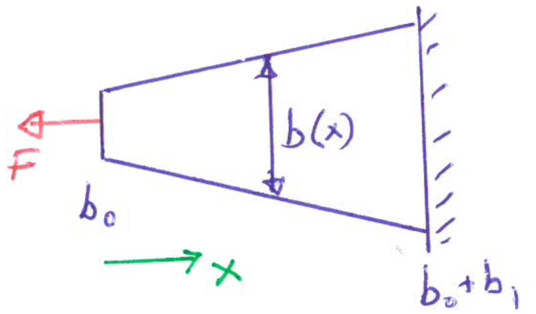
$$\sigma(x) = \frac{Q}{A}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

2.1.4)

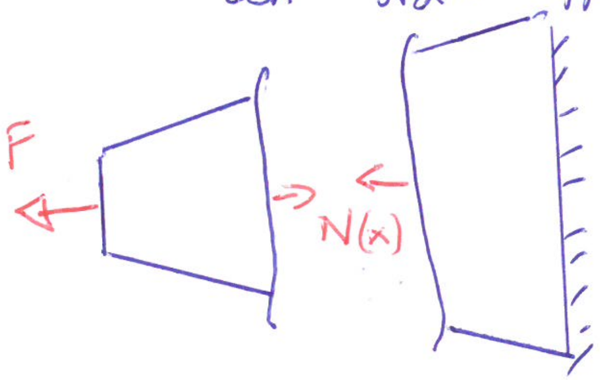
bredd $b(x) = b_0 + b_1 \frac{x}{L}$

Bestäm $\sigma(x)$





Lösning: Snitta vid godtyckligt x och ställ upp jämvikt



Jmv för vänstra delen

$\rightarrow \quad -F + N(x) = 0$

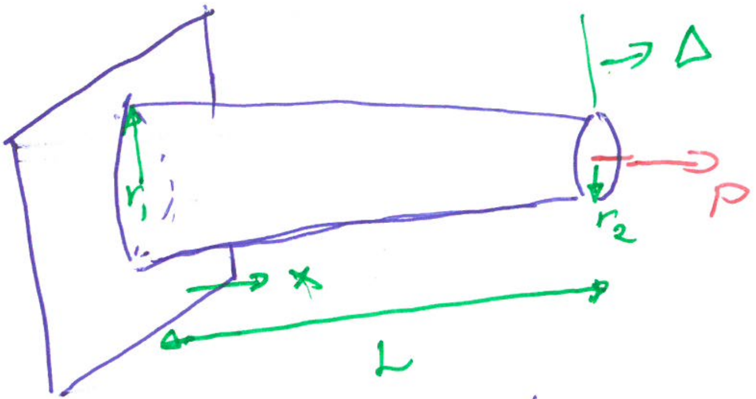
$F = N(x)$

Normalspänningen $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{F}{h\,b(x)} = \frac{F}{h\left(b_0 + \frac{b_1}{L}x\right)} = \frac{FL}{b_0 h L + b_1 h x}$$

2.1.16

Elasticitetsmodul E



Bestäm kraft-deformationssambandet $\Delta(P)$

Lösning:

Varierande töjning i stången p.g.a. varierande tvärsnittsarea

Definitionen av töjning

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \Rightarrow u(x) = \int_0^L \varepsilon \, dx$$

Hooke's lag $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$u(x) = \int \frac{\sigma}{E} dx + C = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx + C$$

Snitta + jämvikt ger $N(x) = P$

$$A(x) = \pi r(x)^2$$

radien varierar linjärt mellan r_1 och r_2

$$r(x) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{L} x = \frac{r_1 L + (r_2 - r_1) x}{L}$$

$$A(x) = \pi \frac{[r_1 L + (r_2 - r_1) x]^2}{L^2}$$

$$u(x) = \int \frac{PL^2}{E\pi\left[r_1L+(r_2-r_1)x\right]^2}\,dx$$

$$= \frac{PL^2}{\pi E}\int \frac{dx}{\left[r_1L+(r_2-r_1)x\right]^2}$$

Från Beta

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$$

$n=2 \qquad a=r_2-r_1 \qquad b=r_1L$

$$u(x) = -\frac{PL^2}{\pi E}\frac{1}{(r_2-r_1)\left[(r_2-r_1)x+r_1L\right]} + C$$

Randvillkor

$$u(0)=0 \Rightarrow -\frac{PL^2}{\pi E(r_2-r_1)r_1L} + C = 0$$

$$C = \frac{PL^2}{\pi E(r_2-r_1)r_1L}$$

$$u(x) = \frac{PL^2}{\pi E(r_2-r_1)}\left[\frac{-1}{(r_2-r_1)x+r_1L} + \frac{1}{r_1L}\right]$$

$$u(x) = \frac{PL^2}{\pi E (r_2 - r_1)} \left[\frac{(r_2 - r_1)x + \cancel{r_1 L} - \cancel{r_1 L}}{r_1 L \left[(r_2 - r_1)x + r_1 L \right]} \right] =$$

$$= \frac{PL^2}{\pi E \cancel{(r_2 - r_1)}} \left[\frac{\cancel{(r_2 - r_1)} x}{r_1 L \left[(r_2 - r_1)x + r_1 L \right]} \right] =$$

$$= \frac{PL}{\pi E} \frac{x}{r_1} \left[\frac{1}{(r_2 - r_1)x + r_1 L} \right]$$

$$\Delta = u(L) = \frac{PL}{\pi E} \frac{L}{r_1} \frac{1}{r_2 L - \cancel{r_1 L} + \cancel{r_1 L}} =$$

$$\boxed{= \frac{PL}{\pi E r_1 r_2}}$$

2.1.15 Bestäm förlängningen hos stången i uppgift 2.1.1.

Lösning 1:

Spänningen: $\sigma(x) = \frac{Q}{A}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

Töjningen enligt Hooke's lag $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\varepsilon(x) = \frac{Q}{EA}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Allmäna definitionen av töjning

$\varepsilon = \frac{du}{dx}$ Integration ger $u(x)$

$$u(x) = \frac{Q}{EA}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + C$$

Randvillkor $u(0) = 0$ ty stången sitter fast i $x = 0$

$$u(x) = \frac{Qx}{EA}\left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

Förlängningen: $\delta = u(L) = \frac{QL}{2EA}$