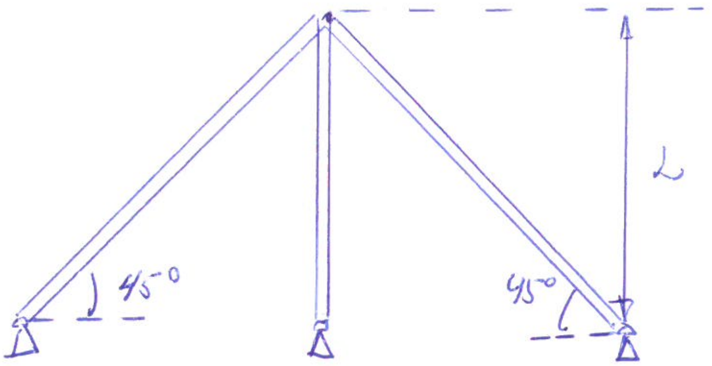
2.2.22

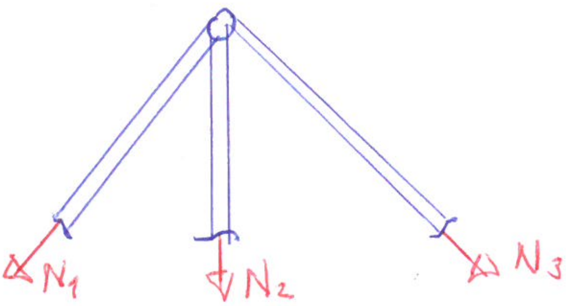
Beräkna spänningen i mittstången om temperaturen höjs T °C

Samma radie a för alla stänger



Lösning:

Snitta + jämvikt.



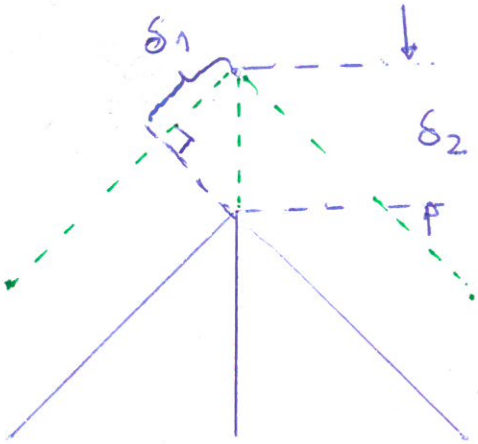
Jämvikt ↑: $-\frac{N_1}{\sqrt{2}} - N_2 - \frac{N_3}{\sqrt{2}} = 0$

Symmetri $N_1 = N_3$

$$\sqrt{2} N_1 = -N_2$$

$$\sqrt{2}\sigma_1 A = -\sigma_2 A$$

Deformationssamband:



$$\delta_1 = \frac{\delta_2}{\sqrt{2}} \qquad \delta_3 = \delta_1$$

$$\varepsilon_1 L_1 = \frac{\varepsilon_2 L_2}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_1 \sqrt{2} L = \frac{\varepsilon_2 L}{\sqrt{2}}$$

$$2\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Materialsamband

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

insatt i deformationssambandet

$$2\frac{\sigma_1}{E} + 2\alpha T = \frac{\sigma_2}{E} + \alpha T$$

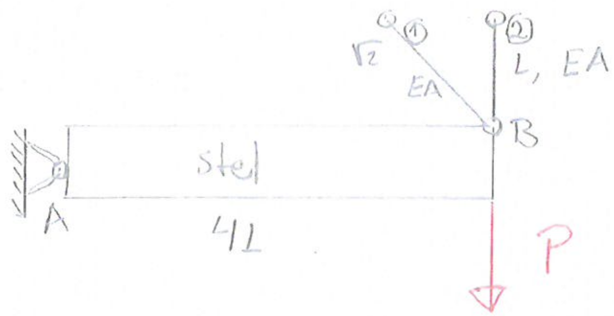
Från jämvikt $\sigma_1 = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}$

$$-2\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}E} + 2\alpha T = \frac{\sigma_2}{E} + \alpha T$$

$$\frac{(-1-\sqrt{2})\sigma_2}{E} = -\alpha T$$

$$\sigma_2 = \frac{E\alpha T}{\sqrt{2}+1}$$

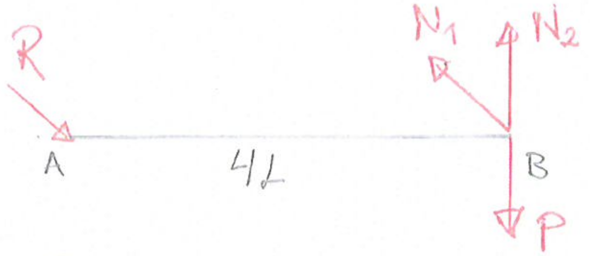
2.2.38



a) Bestäm spänningen i de båda stängerna, vertikal förskjutning i B samt flytlastförhöjningen

b) Bestäm restspänningarna efter

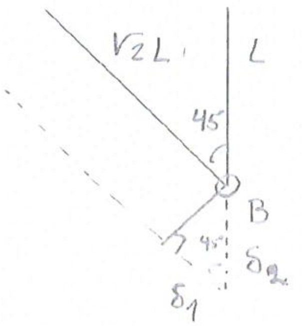
Frilägg och jämvikt



$\overset{\curvearrowright}{M_A}$: $P \cdot 4L = N_2 \cdot 4L + (N_1/\sqrt{2}) \cdot 4L$

$$P = N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_1 \qquad (1)$$

Kompabilitet:



$$\delta_2 = \sqrt{2}\,\delta_1 \qquad (2)$$

Konstitutiva ekvationer

$$\delta = \frac{NL}{EA} \qquad (3)$$

(3) i (2) och förkortning med $\frac{L}{EA}$

$$N_2 = 2N_1$$

$$2N_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_1 = P$$

$$N_1 = \frac{P}{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{P}{A} \qquad \sigma_2 = \frac{2}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{P}{A}$$

2.2.38 forts

$$\sigma_1 = 0.37\, P/A$$

$$\sigma_2 = 0.74\, P/A$$

Nedböjningen $= \delta$

$$\delta_2 = \frac{N_2 L}{E A} = 0.74 \frac{PL}{EA}$$

Inledande plasticering:

Stång två plasticerar först!

$$\sigma_s = 0.74 \frac{P_s}{A}$$

$$P_s = \frac{1}{0.74} \sigma_s A = 1.35\, \sigma_s A$$

Fullplasticering:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_s$$

Insatt i jämvikt: (1)

$$P_f = \sigma_s A + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_s A$$

$$P_f = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sigma_s A = 1.7\, \sigma_s A$$

Flytlastförhöjningen:

$$\beta = \frac{P_f}{P_s} - 1 = 26\,\%$$

Avlastning:

Avlastning sker alltid elastiskt

/

2.2.38 Vi kan uppnå restspänningstillståndet genom att lasta på med P_f och sedan trycka tillbaka med P_f vilket sker elastiskt. Efter avlastning får vi då spänningarna

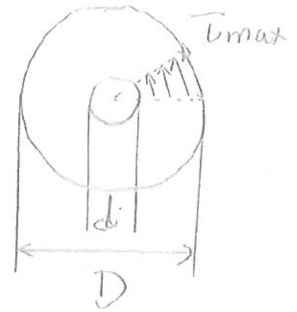
$$\sigma_1 = \sigma_s - 0.37\, P_f/A$$
$$\sigma_2 = \sigma_s - 0.74\, P_f/A$$

$$P_f = 1.7\,\sigma_s \cdot A$$

$$\sigma_1 = \sigma_s - 0.37 \cdot 1.7\,\sigma_s = 0.37\,\sigma_s$$
$$\sigma_2 = \sigma_s - 0.74 \cdot 1.7\,\sigma_s = -0.26\,\sigma_s$$

Elastisk vridning av cirkulärt tvärsnitt

Vridande moment tas upp som skjuvspänningar i tvärsnittet vilka är linjärt fördelade



$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v} \quad (6.75)$$

$$W_v = \frac{\pi}{16D}\left(D^4 - d^4\right) \quad (6.77)$$

Tunnväggig approximation

skjuvspänningen ≈ konst över tvärsnittet

$$W_v = 2\pi a^2 t \quad (6.80)$$

Vridningsvinkeln

Vridningen av en axel med längd L

$$\theta = \frac{M_v L}{G K}$$

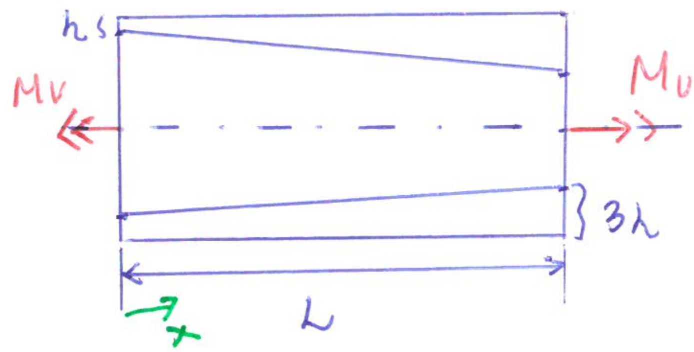
G - skjuvmodulen $\quad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.13)$

Tjockväggigt: $\quad K = \pi \dfrac{D^4 - d^4}{32} \quad (6.76)$

Tunnväggigt $\quad K = 2\pi a^3 t \quad (6.79)$

2.6.12

Bestäm totala förvridningen
Antag tunnväggighet
linjärt varierande tjocklek



Vridning av axel med längd L $\theta = \frac{M_v L}{GK}$

Infinitesimal lång axel med längd dx

vrids alltså

$$d\theta = \frac{M_v \, dx}{GK(x)}$$

Total förvridning $\theta = \int_L \frac{M_v}{GK(x)} dx$

Vridstyvhetens tvärsnittsfaktor K för tunnväggigt rör

$K = 2\pi a^3 t$ (6.80) a - medelradie t - tjocklek

$$h(x) = h + \frac{3h - h}{L} x = h + \frac{2h}{L} x$$

För snyggare räkningar inför $u = x + L/2$

$$h(u) = \frac{2h}{L} u$$

$$K = 2\pi a^3 \left(\frac{2h}{L} u\right) = \frac{4\pi a^3 h}{L} u$$

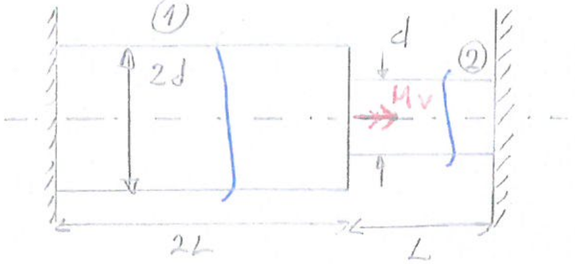
Totala förvridningen

$$\theta = \int_0^L \frac{M_v}{G K(x)} dx = \int_{L/2}^{3L/2} \frac{M_v}{G K(u)} du$$

$$= \frac{M_v L}{G 4\pi a^3 h} \int_{L/2}^{3L/2} \frac{1}{u} du = \frac{M_v L}{G 4\pi a^3 h} \left[\log\left(\frac{3L}{2}\right) - \log\left(\frac{L}{2}\right) \right] =$$

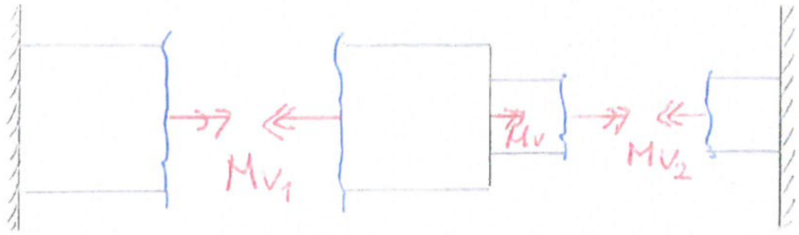
$$= \frac{M_v L}{G 4\pi a^3 h} \log\left(\frac{\frac{3L}{2}}{\frac{L}{2}}\right) = \frac{M_v L}{G 4\pi a^3 h} \log(3)$$

2.6.14



Hur stor kan M_v vara om största skjuvspänning tillåts vara τ_{till}

Snitta genom delarna och ställ upp jämvikt



Jämvikt för mittendelen

$$\rightarrow\!\!\rightarrow \quad -M_{v_1} + M_v + M_{v_2} = 0 \qquad (1)$$

Kompabilitet:

$\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad (2)$ ty fast inspänd

Konstitutivt samband

$$\theta = \frac{ML}{GK} \qquad (3)$$

(3) i (2)

$$\frac{M_{v_1} \cdot 2L}{G K_1} = -\frac{M_{v_2} \cdot L}{G K_2} \qquad (4)$$

$$K_1 = \frac{\pi d^4}{2} \qquad K_2 = \frac{\pi d^4}{32} \qquad (5)$$

(5) i (4)

$$\frac{4 M_{v_1}}{\pi d^4} = -\frac{32 M_{v_2}}{\pi d^4} \qquad M_{v_1} = -8 M_{v_2}$$

Insatt i (1) ger

$$8 M_{v_2} + M_v + M_{v_2} = 0 \Rightarrow M_{v_2} = -\frac{M_v}{9} \qquad M_{v_1} = \frac{8 M_v}{9}$$

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_v|}{W_v} \qquad |\tau_{max_1}| = \frac{8 M_v}{9 W_{v_1}} = \frac{8 M_v}{9 \frac{\pi d^3}{2}} = \frac{16 M_v}{9 \pi d^3}$$

$$|\tau_{max_2}| = \frac{M_v}{9 W_{v_2}} = \frac{M_v}{9 \frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 M_v}{9 \pi d^3}$$

$$M_{v_{till}} = \frac{9 \pi d^3 \tau_{till}}{16}$$