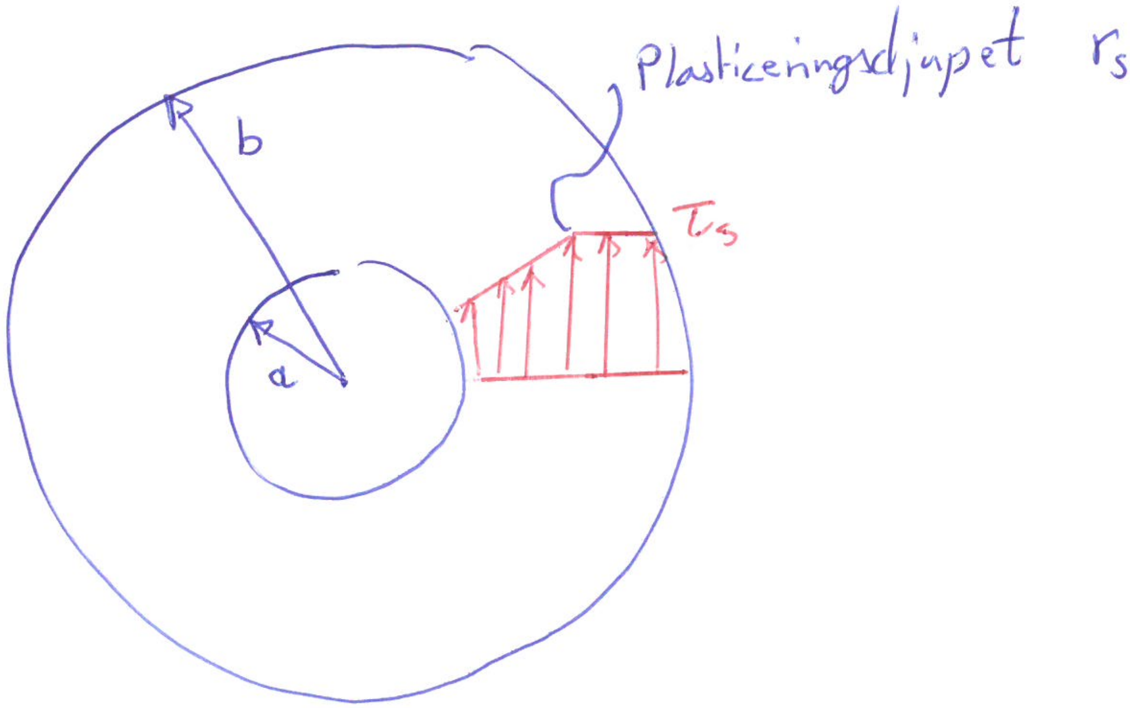
Elastisk-plastisk vridning

Sträckgräns i skjuvning τ_s

Spänningsfördelning



Elastiska området: Linjär spänningsfördelning

$$\tau(r) = \tau_s \frac{r}{r_s}$$

Plastiska området konstant spänning $\tau(r) = \tau_s$

Pålagt moment

$$M = \int_0^{2\pi}\int_a^b \tau(r) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{moment} \\ \text{arm}}}{r} \cdot \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{\text{areaelemt}} =$$

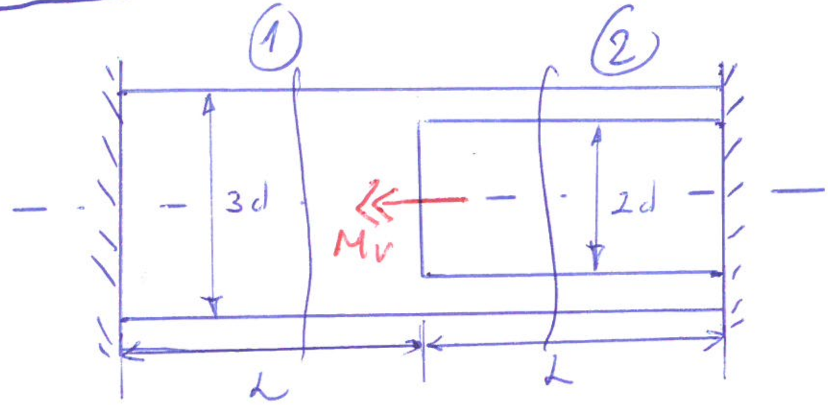
$$= \frac{2\pi\tau_s}{r_s}\int_a^{r_s} r^3\,dr + 2\pi\tau_s\int_{r_s}^b r^2\,dr$$

$$= \frac{2\pi\tau_s}{r_s}\left[\frac{r_s^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right] + 2\pi\tau_s\left[\frac{b^3}{3} - \frac{r_s^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{\pi\tau_s}{6}\left[3r_s^3 - \frac{3a^4}{r_s} + 4b^3 - 4r_s^3\right] =$$

$$= \frac{\pi\tau_s}{6}\left[4b^3 - \frac{3a^4}{r_s} - r_s^3\right] \quad (6.85 \text{ i F.S})$$

2.6.15



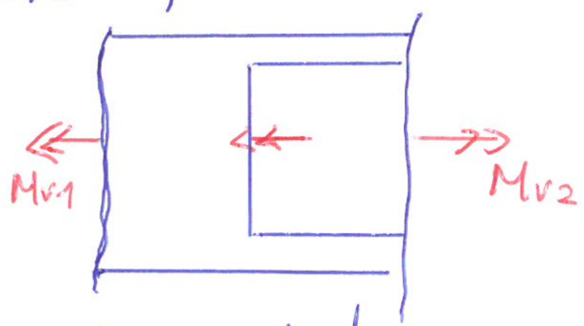
Ideal-plastiskt material (G, τ_s)

Bestäm M_v när plasticering börjar

Lösning: Elastiskt upp till inledande plasticering

Hitta det M_v som ger $\tau_{max} = \tau_s$

Snitta + jämvikt



Jämvikt

$$\rightarrow : \; -M_{v1} - M_v + M_{v2} = 0 \quad (1)$$

Deformationssamband:

$$\theta_1 + \theta_2 = 0 \quad (2)$$

Materiallag:

$$\theta = \frac{M_v L}{G K} \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{\pi (3d)^4}{32} = \frac{81 \pi d^4}{32} \quad (4)$$

$$K_2 = \frac{\pi\left((3d)^4 - (2d)^4\right)}{32} = \frac{\pi}{32}\left[81 d^4 - 16 d^4\right] = \frac{65 D^4}{32} \quad (5)$$

(3), (4) och (5) i deformationssambandet (2)

$$\frac{M_{v1} L}{G} \frac{32}{81 \pi d^4} = -\frac{M_{v2} L}{G} \frac{32}{65 \pi d^4} \quad (6)$$

$$\frac{M_{v1}}{81} = -\frac{M_{v2}}{65} \Rightarrow M_{v1} = -\frac{M_{v2}}{65} \cdot 81$$

Insatt i jämvikt (1)

$$M_{v2} \frac{81}{65} - M_v + \frac{65 M_{v2}}{65} = 0$$

$$M_{v2} \left[\frac{81+65}{65}\right] = M_v \Rightarrow M_{v2} = \frac{65}{146} M_v$$

$$M_{v1} = -\frac{65}{146} \frac{81}{65} M_v = -\frac{81}{146} M_v$$

Maximala skjuvspänningen τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{|M_v|}{W_v}, \quad W_v = \frac{\pi}{16D}\left[D^3 - d^3\right] = \frac{K}{(D/2)}$$

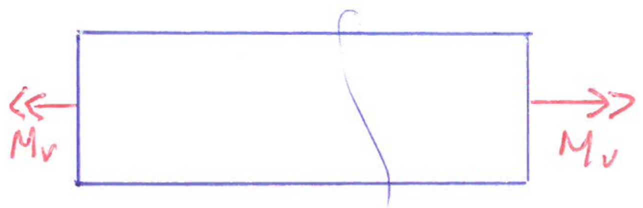
Del 1

$$\tau_{max_1} = \frac{\cancel{81}}{146} M_v \frac{32}{\cancel{81} \pi d^{\cancel{4}}} \frac{3\cancel{d}}{2} = \frac{3 \cdot 16}{146} \frac{M_v}{\pi d^3} = \boxed{\frac{24}{73} \frac{M_v}{\pi d^3}}$$

$$\tau_{max_2} = \frac{65}{146} M_v \frac{32}{65 \pi d^4} \cdot d = \frac{32}{146} \frac{M_v}{d^3} = \frac{4}{73} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\frac{24}{73} \frac{M_v}{\pi d^3} = \tau_s \Rightarrow M_v = \frac{73}{24} \pi d^3 \tau_s$$

2.6.22



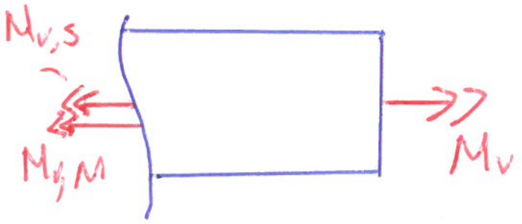
$d = 30\,mm$

$G_{stål} = 80\ GPa$

$G_{mässing} = 35\ GPa$

Bestäm D så att momenten i de bägge delarna blir lika. Hur förhåller sig den maximala skjuvspänningen i de bägge delarna?

Lösning: Snitta + jämvikt



Jämvikt →: $-M_{v,s} - M_{v,M} + M_v = 0$

Deformationssamband: Delarna måste rotera lika mycket

$$\theta_s = \theta_m$$

Materiallag

$$\theta = \frac{M_v L}{G K}$$

$$K_s = \frac{\pi d^4}{32} \qquad K_M = \frac{\pi}{32}\left[D^4 - d^4\right]$$

$$\frac{M_{v,s} L}{G_s} \frac{\cancel{32}}{\cancel{\pi} d^4} = \frac{M_{v,M}}{G_{,M}} \frac{\cancel{32}}{\cancel{\pi}(D^4 - d^4)}$$

$$\frac{M_{v,s}}{G_s d^4} = \frac{M_{v,M}}{G_M (D^4 - d^4)}$$

$$\frac{M_{v,s}}{M_{v,M}} = \frac{G_s}{G_m} \frac{d^4}{(D^4 - d^4)} = 1$$

$$\frac{d^4}{(D^4 - d^4)} = \frac{G_M}{G_s} \Rightarrow (D^4 - d^4) G_M = d^4 G_s$$

$$D^4 = \frac{d^4 (G_m + G_s)}{G_m}$$

$$D = d \left(\frac{G_m + G_s}{G_m} \right)^{1/4} \simeq 40.4 \text{ mm}$$

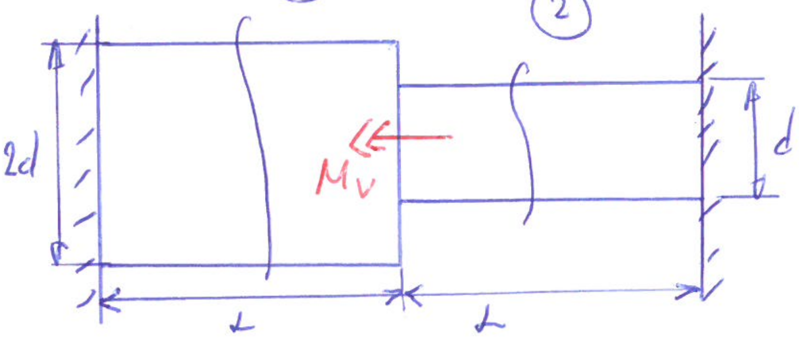
$$\tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$$

Samma moment i båda delarna

$$\frac{\tau_{max,s}}{\tau_{max,M}} = \frac{W_{vM}}{W_{vs}} \left\{ W_v = \frac{K}{(D/2)} \right\} = \frac{\frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 D}}{\frac{\pi d^3}{16}} =$$

$$= \frac{(D^4 - d^4)}{D d^3} = \frac{d \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right)}{D} = \frac{d}{D} \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \simeq 1.7$$

2.6.29



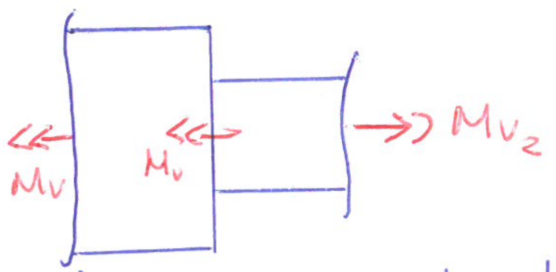
Material (G, τ_s)

Bestäm förhållandet mellan momentet vid inledande plasticering M_s och vid fullplasticering M_f

Lösning:

Inledande plasticering, elastisk analys

Snitta, jämvikt



Jämvikt

$-M_{v1} - M_v + M_{v2} = 0$

Deformationssamband:

$\theta_1 + \theta_2 = 0$

Materiallag

$$\theta = \frac{M_v L}{GK}$$

$K_1 = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{16\pi d^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2}$ $\quad W_v = \frac{\pi d^3}{2}$

$K_2 = \frac{\pi d^4}{32}$ $\quad W_v = \frac{\pi d^3}{16}$

Insatt i deformationssambandet

$$\frac{M_{v1} L}{G} \cdot \frac{32}{16\pi d^4} = -\frac{M_{v2} L}{G} \frac{32}{\pi d^4}$$

$$\frac{M_{v1}}{16} = -M_{v2}$$

Insatt i jämvikt

$$-M_{v1} - M_v - \frac{M_{v1}}{16} = 0$$

$$\frac{-16M_{v1} - M_{v1}}{16} = M_v \qquad M_{v1} = -\frac{16}{17} M_v$$

$$M_{v2} = \frac{1}{17} M_v$$

$$\tau_{max1} = \frac{|M_{v1}|}{W_{v1}} = \frac{16}{17} M_v \frac{1}{\pi d^3} = \frac{32}{17} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max2} = \frac{|M_{v2}|}{W_2} = \frac{1}{17} M_v \frac{16}{\pi d^3} = \frac{16}{17} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\tau_{max} = \tau_s \Rightarrow M_s = \frac{17}{32} \tau_s \pi d^3$$

Fullplasticering, τ_s genom hela tvärsnittet i båda axeldelarna

Vid elastisk-plastisk deformation

$$M = \frac{\pi \tau_s}{6}\left[4b^3 - \frac{3a^4}{r_s} - r_s^3\right]$$

Massiv axel, $a = 0$

Fullplasticering $r_s = 0$

$$M_f = \frac{\pi \tau_s}{6}\left[4\left(\frac{D}{2}\right)^3\right] = \frac{\pi \tau_s D^3}{12}$$

Från den elastiska analysen fick vi att M_{v1} var negativ och M_{v2} positiv

$$M_{f_1} = -\frac{\pi \tau_s (2d)^3}{12} = -\frac{\pi \tau_s 8 d^3}{12}$$

$$M_{f2} = \frac{\pi \tau_s d^3}{12}$$

Insatt i jämvikt

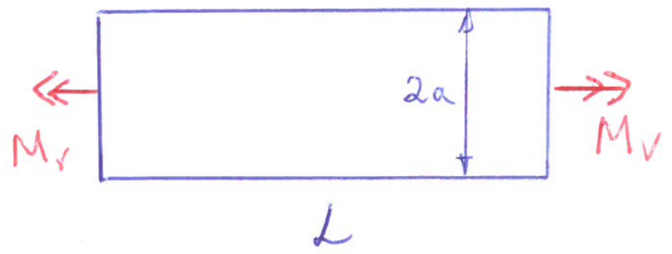
$$\frac{\pi \tau_s 8 d^3}{12} - M_{vf} + \frac{\pi \tau_s d^3}{12} = 0$$

$$M_{vf} = \frac{9 \pi d^3 \tau_s}{12} = \frac{3}{4} \pi d^3 \tau_s$$

$$\frac{M_{vf}}{M_s} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{17}{32}} = \frac{24}{17}$$

2.6.31

Material (G, τ_s)



Stången belastas med ett moment som är 20 % större än momentet vid inledande plasticering

a) Bestäm plasticeringsdjupet

b) Bestäm återfjädring och kvarstående deformation vid fullständig avlastning

c) Bestäm restspänningarna

Lösning:

a) Elastisk-plastisk deformation

$$M = \frac{\pi \tau_s}{6}\left[4b^3 - \frac{3a^4}{r_s} - r_s^3\right]$$

Vårt fall, massiv axel, $a = 0$ samt radie a

$$M = \frac{\pi \tau_s}{6}\left[4a^3 - r_s^3\right]$$

Hitta momentet som är 20 % högre än det vid inledande plasticering

Vid inledande plasticering är $r_s = a$

$$M_s = \frac{\pi \tau_s}{6}\left[4a^3 - a^3\right] = \frac{\pi \tau_s}{6} 3a^3$$

$$M = \frac{6}{5} M_s$$

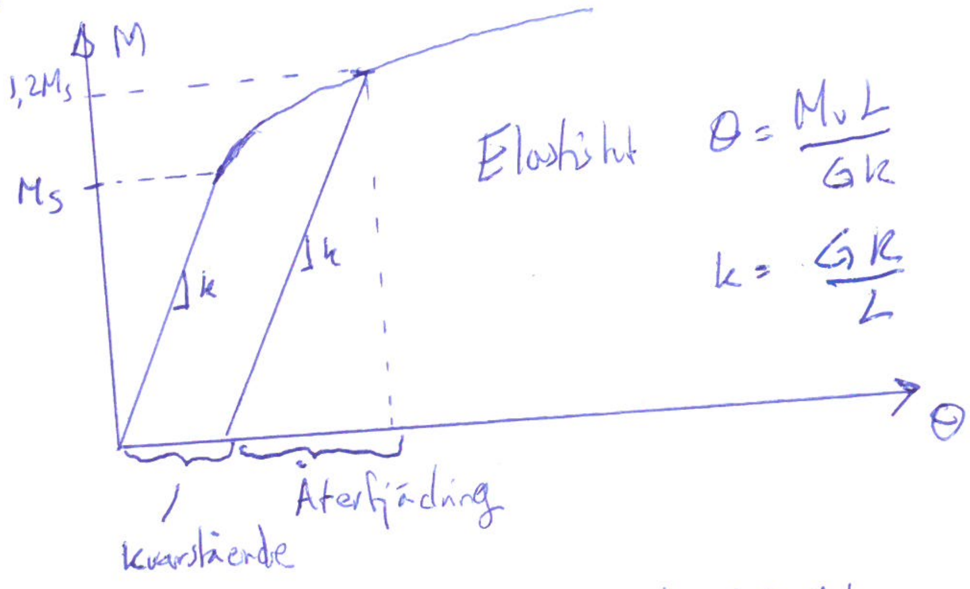
$$\frac{\cancel{\pi \tau_s}}{\cancel{6}}\left[4a^3 - r_s^3\right] = \frac{6}{5}\cdot\frac{\cancel{\pi \tau_s}}{\cancel{6}}\cdot 3a^3$$

$$4a^3 - r_s^3 = \frac{18}{5}\cdot a^3$$

$$\frac{20-18}{5}a^3 = r_s^3 \qquad \frac{2}{5}a^3 = r_s^3 \qquad r_s = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3} a$$

$$r_s = 0.737\,a$$

b) Skiss av $\theta(M)$

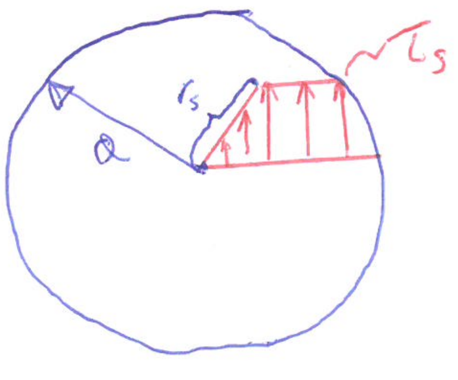


Elastiskt $\theta = \frac{M_v L}{GK}$

$k = \frac{GK}{L}$

Total förvridning vid $1.2 M_s$

Titta på spänningstillståndet i axeln



Linjär fördelning samt elastiskt upp till r_s

För den elastiska delen

$\tau = G\frac{\theta}{L} r$ (6.79 i FS)

$\theta = \frac{\overbrace{M_v}^{\tau_{max}} L}{G W_v a} = \frac{\tau_{max} L}{G a}$

$\theta = \frac{L \tau_s}{G r_s}$

Alternativt $\theta = \frac{M_v L}{G K}$ där M är från delen som verkar i det elastiska området och K beräknat med radie r_s

$\theta = \frac{L \tau_s}{G \cdot 0.737 a}$

$\theta = 1.36 \frac{L \tau_s}{G a}$

Återfjädring sker elastiskt

$\theta_{åter} = -\frac{1.2 M_s L}{G K} = \left\{ K = \frac{\pi a^4}{2} \right\} = -\frac{6 \cdot 2 M_s L}{5 G \pi a^4}$

$= -\frac{6 \cdot 2 L}{5 G \pi a^4} \frac{\pi \tau_s}{6 \cdot 2 \cdot 6} 3 a^3 = -\frac{6}{5} \frac{\tau_s L}{G a}$

Kvarvarande deformation

$\theta_{rest} = \theta + \theta_{åter} = 0.157 \frac{\tau_s L}{G a}$

c) Restspänningarna ges genom addition av spänningarna från elastisk-plastisk lösning och spänningarna vid elastisk avlastning

Spänningsfördelning från avlastning

$$\tau = G\frac{\theta}{L}r = -G\frac{6}{5}\frac{\tau_s L}{G a}\frac{r}{L} = -\frac{6}{5}\frac{\tau_s}{a}r$$

För $0 \leq r \leq r_s$:

Innan avlastning $\tau(r) = \frac{\tau_s}{r_s}r$

Efter avlastning

$$\tau(r) = \frac{\tau_s}{r_s}r - \frac{6}{5}\frac{\tau_s}{a}r = \frac{\tau_s}{0.737a}r - \frac{1.2\tau_s}{a}r = 0.157\frac{\tau_s}{a}r$$

För $r_s \leq r \leq a$

Före avlastning

$$\tau(r) = \tau_s$$

Efter avlastning

$$\tau(r) = \tau_s - \frac{1.2\tau_s r}{a} = \tau_s\left[1 - 1.2\frac{r}{a}\right]$$