

# Problemlista i fysik

v. 2021-12-03

Uppgifterna i denna lista är huvudsakligen tagna från äldre ( $\leq 2010$ ) extentor i kurserna i elektromagnetism och vågrörelselära ("elväg") för civilingenjörsprogram på KTH. De är tänkta att ge exempel på de viktigaste koncepten i dessa kurser. Uppgifterna bär de gamla programbeckningarna för att visa vilka tentor uppgifterna är tagna ifrån. BD är materialdesign (bergs), CL är civilingenjör & lärare, F är teknisk fysik, I är industriell ekonomi, M är maskinteknik, OPEN är öppen ingång och T är farkostteknik. OBS: avsnittet om kretsteori är nytt och bara avsett för vissa kurser.

Många av uppgifterna i listan nedan är från äldre tentor som inte har A- och B-del. Dessa kan variera i svårighet, men ligger ofta närmare B-uppgifterna i svårighet. Varje övning är uppdelad i två delar, 4-5 uppgifter som det är tänkt att övningsassistenten ska räkna igenom under övningen, och några extrauppgifter som gärna får räknas innan eller efter övningen. Det kan hända att övningsassistenten räknar talen i annan ordning eller väljer att räkna vissa av extratalen istället för övningstalen.

Till varje övning finns en hänvisning till kapitel i boken University Physics av Young och Freedman. Dessa gäller för 13:e till 15:e upplagan.

Denna lista innehåller även lösningar till många uppgifter. Lösningarna är skrivna av Ulf Lundström med tillägg av William Twengström (née Vågberg) och undertecknad. Där lösningar inte finns är facit inlagt istället. Upptäckta fel tas tacksamt emot.

/Ilian Häggmark (ilian.haggmark@biox.kth.se)

## Innehåll

<b>Akustik (kap. 15-16)</b>	<b>5</b>
1 Övningsuppgifter . . . . .	5
Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1 . . . . .	5
Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5 . . . . .	5
Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3 . . . . .	5
Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2 . . . . .	6
2 Extrauppgifter . . . . .	6
Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4 . . . . .	6
Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3 . . . . .	6
Summer – I 2000-01-11 uppgift 3 . . . . .	6
Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3 . . . . .	6
3 Lösningar . . . . .	7

<b>Elektrostatik (kap. 21-23)</b>	<b>11</b>
1 Övningsuppgifter . . . . .	11
Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2 . . . . .	11
Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2 . . . . .	11
Åskmoln – F 2011-? . . . . .	11
Nervtrådsloop – MiT 2014-10-29 uppgift B3 . . . . .	11
Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3 . . . . .	12
2 Extrauppgifter . . . . .	12
Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1 . . . . .	12
Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1 . . . . .	12
Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4 . . . . .	12
Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2 . . . . .	12
Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1 . . . . .	13
3 Lösningar . . . . .	13
<b>Kondensatorer (kap. 24-26)</b>	<b>18</b>
1 Övningsuppgifter . . . . .	18
Oljenivåmätare – I 2002-03-05 uppgift 1 . . . . .	18
Gnista – I 2003-01-13 uppgift 1 . . . . .	18
Kondensatormikrofon – MT 2005-06-01 uppgift 2 . . . . .	18
Givarsignal – I 2005-01-11 uppgift 2 . . . . .	18
Pixelkondensator – I 2002-01-09 uppgift 2 . . . . .	19
2 Extrauppgifter . . . . .	19
Alkometer – FCL 2009-06-04 uppgift A2 . . . . .	19
Koaxialkabel – I 1999-10-22 uppgift 4 . . . . .	19
Tjuvstartssensor – MTI 2008-08-18 uppgift A2 . . . . .	19
Plattkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A4 . . . . .	20
Cylinderkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B2 . . . . .	20
3 Lösningar . . . . .	20
<b>Magnetism (kap. 27-28)</b>	<b>24</b>
1 Övningsuppgifter . . . . .	24
Magnetseparation – BD 2009-05-27 uppgift A2 . . . . .	24
Startmotor – MPTIL 2004-04-21 uppgift 5 . . . . .	24
Faradayrotator – MTI 2000-06-06 uppgift 2 . . . . .	24
Bildrör 2 – MT 1998-05-28 uppgift 2 . . . . .	24
Hastighetsmätare – I 2000-01-11 uppgift 2 . . . . .	25
Magnetaccelerator – MT 1999-04-15 uppgift 1 . . . . .	25
2 Extrauppgifter . . . . .	25
Växtmagnet – MBDTI 2010-05-29 uppgift A5 . . . . .	25
Metalldetektor – F 2007-05-18 uppgift 2 . . . . .	25
Tankeläsning – I 2000-10-25 uppgift 4 . . . . .	26
Spismagnet – IMT 2002-04-12 uppgift 3 . . . . .	26
Högtalarmagnet – MBDTI 2010-06-03 uppgift A2 . . . . .	26
3 Lösningar . . . . .	26
<b>Induktion (kap. 29-30)</b>	<b>30</b>
1 Övningsuppgifter . . . . .	30
Induktion – FCL 2009-06-04 uppgift A3 . . . . .	30
Magnetpuls – MTI 2001-06-07 uppgift 1 . . . . .	30

	Cykellyse – MTI 1999-06-02 uppgift 1 . . . . .	30
	Tröghetsnavigering – IMT 2002-03-05 uppgift 2 . . . . .	31
	Magnetbromsar – IMT 2003-01-13 uppgift 2 . . . . .	31
2	Extrauppgifter . . . . .	31
	Strömpuls – MTI 2009-05-20 uppgift A2 . . . . .	31
	Induktion 2 – MTI 2009-05-20 uppgift B1 . . . . .	31
	Vridning – ILMP 2005-05-11 uppgift 1 . . . . .	31
	Ekorrhjul – TMI 2008-03-10 uppgift A1 . . . . .	32
	Spole runt solen – FCL 2013-05-28 uppgift B2 . . . . .	32
3	Lösningar . . . . .	32
<b>Kretsteori (kap. 26+31)</b>		<b>36</b>
1	Övningsuppgifter . . . . .	36
	Frekvensfilter – OPEN 2018-01-12 uppgift 4 . . . . .	36
	LRC-krets – OPEN 2018-02-28 uppgift 1 . . . . .	36
	Induktionshäll – OPEN 2020-04-15 uppgift 2 . . . . .	37
	Batteriladdning – OPEN 2019-10-25 uppgift 2 . . . . .	38
	Kretsinduktion – OPEN 2019-01-11 uppgift 3 . . . . .	38
2	Extrauppgifter . . . . .	39
	Strömbrytare – OPEN 2018-04-04 uppgift 4 . . . . .	39
	RLC-krets – OPEN 2019-01-11 uppgift 2 . . . . .	39
	LC-krets – OPEN 2019-04-15 uppgift 4 . . . . .	40
	Resistanspolyeder – OPEN 2019-05-29 uppgift 2 . . . . .	40
	Spänningsbrygga 1 – OPEN 2021-01-15 uppgift A3 . . . . .	41
	Spänningsbrygga 2 – OPEN 2021-01-15 uppgift B6 . . . . .	42
3	Lösningar . . . . .	42
<b>Geometrisk optik (kap. 33-34)</b>		<b>55</b>
1	Övningsuppgifter . . . . .	55
	Ljusledare – IMT 2000-01-11 uppgift 5 . . . . .	55
	Ögonmodell – F 2003-03-06 uppgift 4 . . . . .	55
	Växthusbelysning – MBDTI 2010-05-29 uppgift A1 . . . . .	55
	Triangulering – IMT 2002-03-05 uppgift 4 . . . . .	56
	Dispersion – FCL 2008-06-02 uppgift B2 . . . . .	56
2	Extrauppgifter . . . . .	56
	Fingeravtryck – IMT 2000-10-25 uppgift 1 . . . . .	56
	Övervakningskamera – FCL 2009-06-04 uppgift A5 . . . . .	56
	Stereoseende – MBDTI 2010-06-03 uppgift A4 . . . . .	57
	Fjärrkontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A1 . . . . .	57
3	Lösningar . . . . .	57
<b>Optiska system (kap. 34)</b>		<b>60</b>
1	Övningsuppgifter . . . . .	60
	Mikroskop – BD 2009-05-27 uppgift A4 . . . . .	60
	Ugnskikare – IMT 2002-04-12 uppgift 1 . . . . .	60
	Ljusbom 2 – FCL 2009-05-18 uppgift B2 . . . . .	60
	Kirurgmikroskop – F 2003-03-06 uppgift 1 . . . . .	60
2	Extrauppgifter . . . . .	61
	Ljusbom – FCL 2009-05-18 uppgift A4 . . . . .	61
	Vidvinkelkonverterare – I 020109 uppgift 1 . . . . .	61

	Kikare – FCL 2008-06-02 uppgift B1 . . . . .	61
	Fibermikroskop – IMT 2001-10-26 uppgift 2 . . . . .	61
3	Lösningar . . . . .	62
<b>Interferens (kap. 35)</b>		<b>65</b>
1	Övningsuppgifter . . . . .	65
	Luftspalt – IMT 2001-10-26 uppgift 4 . . . . .	65
	Rälssmörjning – IMTP 2006-10-26 uppgift 5 . . . . .	65
	Vinkel-AR – MTI 2003-08-29 uppgift 4 . . . . .	65
	Deformation – ILMP 2005-01-11 uppgift 5 . . . . .	66
2	Extrauppgifter . . . . .	66
	Oljetransport – IMT 2002-03-05 uppgift 5 . . . . .	66
	Sensor-AR – MTI 2009-05-20 uppgift A5 . . . . .	66
	Undervattenskamera – FCL 2008-08-18 uppgift A5 . . . . .	66
	Randigt – Media 2010-03-19 uppgift B3 . . . . .	67
	Tvåskiktsbeläggning – IMT 2002-01-09 uppgift 4 . . . . .	67
	Ultraljudskontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B3 . . . . .	67
3	Lösningar . . . . .	67
<b>Diffraction och Polarisation (kap. 33+36)</b>		<b>71</b>
1	Övningsuppgifter . . . . .	71
	DPI – Media 2003-03-07 uppgift 2 . . . . .	71
	Jättemegafon – F 2005-06-01 uppgift 3 . . . . .	71
	Laserkvast – IMTP 2006-01-13 uppgift 5 . . . . .	71
	Ljusstreck – IMTP 2007-01-15 uppgift 5 . . . . .	71
2	Extrauppgifter . . . . .	72
	Solljusgitter – MTPI 2005-08-22 uppgift 5 . . . . .	72
	Ultraljudsmörning – IMT 2002-04-12 uppgift 5 . . . . .	72
	Dubbelbrytning – BD 2009-05-27 uppgift A5 . . . . .	72
	Polarisationsperiskop – MTI 2008-06-02 uppgift A2 . . . . .	72
	Ultraljudsdiffraction – MTI 2009-05-20 uppgift B3 . . . . .	73
3	Lösningar . . . . .	73

# Akustik (kap. 15-16)

## 1 Övningsuppgifter

### Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1

**Tema:** Resultatmätning vid idrottsevenemang

Startpistol i krut-utförande är numera ett museiföremål, men användes ju länge. Vilken akustisk effekt avger en sådan om den hörs med 64 dB på 100 m avstånd.

### Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5

**Tema:** High-end-kameror

En elektronisk kamera är ju egentligen ljudlös (i varje fall när man tar bilden). Det har dock visat sig att många fotografer vill höra ett tydligt klickljud när bilden tas, och man har därför lagt in en liten sådan funktion (precis som på kassaapparater). Klickljudet åstadkommes av ett litet högtalarmembran som är cirkulärt med radie 1 mm. Klickljudet ska höras med 40 dB på 1 m avstånd. Vilken hastighet måste membranet röra sig med?

### Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3

**Tema:** Vinterkyla

När det snöar upplever man det ofta som att det blir tyst runt omkring. Detta kan delvis bero på att trafik mm minskar men också på att ljud absorberas i de fallande snöflingorna. Detta gör att det vanliga avståndsberoendet ändras så att en extra exponentialfaktor tillkommer. Uttrycket för ljudets avståndsberoende blir

$$I = \frac{\text{Effekt från källan}}{4\pi r^2} e^{-ar}$$

Den vanliga regeln att ljudet minskar 6 dB då man fördubblar avståndet gäller inte längre nu. Hur många dB minskar ljudet om man går från 10 m till 20 m avstånd, respektive om man går från 20 m till 40 m avstånd?

$$a = 0.12/\text{m}$$

## Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2

**Tema:** Robotdammsugare

Högtalaren ska avge 65 dB på 2 m avstånd. Vilken kraft utövar membranet maximalt på luften om membranytan är  $10 \text{ cm}^2$ ? Antag att hela membranet rör sig lika mycket.

## 2 Extrauppgifter

### Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4

**Tema:** Växthus

Ohyra är alltid ett problem och på grund av debatten numera vill man helst inte använda besprutningsmedel. En metod är att använda stående ultraljudsvågor över plantorna som påverkar insekterna. Mellan två plattor alstras en stående ultraljudsvåg med frekvens 120 kHz. Partikelhastigheten ska ha ett maxvärde på 1.2 m/s. Vilken förskjutningsamplitud behövs?

### Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3

**Tema:** Arbetsplatssäkerhet

I en industrilokal är 20 identiska maskiner utplacerade i en ring (det finns ett skäl till det, men det tar för mycket utrymme att berätta varför). Tillsammans ger de upphov till ett buller på 78.6 dB i mitten av ringen. Hur mycket bullrar de om en maskin stannar?

### Summer – I 2000-01-11 uppgift 3

**Tema:** Instrumentpaneler till tyngre fordon

En summer måste naturligtvis också finnas, för att alarmera om riktigt allvarliga fel. Vid första konstruktionsförsök visade sig denna ge för låg ljudintensitetsnivå (=54 dB). För att höja detta värde bytte man frekvens från 600 till 900 Hz, fördubblade membranytan, och ökade vibrationsamplituden med 50%. Vilken blev den nya ljudintensitetsnivån?

### Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3

**Tema:** Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Alla båtar har ekolod. Sådana bygger på att man skickar ut ljudpulser direkt i vattnet och mäter när och vad som kommer tillbaka. Ljudsändaren består i princip av en metallbricka som vibrerar med en viss fix amplitud och frekvens. När man har den i luft ger den  $50 \mu\text{W}/\text{m}^2$  på 1 m avstånd. Vilken intensitet ger den på 1 m avstånd i vatten? (den är alltså nedsänkt i vattnet)

### 3 Lösningar

#### Startpistol – F 2008-08-18 uppgift A1

**Lösning:** Ljudintensitetsnivån  $\beta = 64$  dB motsvarar intensiteten  $I$  där

$$\beta = \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB}, \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

$$\Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2.$$

Ljudet är spritt över en sfär med radie  $r = 100$  m och yta  $A = 4\pi r^2 = 1.3 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ . Effekten som krävs för detta är

$$P = IA = 0.32 \text{ W}.$$

I detta fall försummas reflektion av ljud mot marken. Detta är rimligt om marken är "mjuk" (t.ex. gräs) och därför absorberar ljud. Om marken istället är asfalt kommer ljudet som är riktat nedåt reflekteras och hälften så stor effekt krävs eftersom ljudet sprids över en hälften så stor area.

#### Kameraklick – IMT 2002-01-09 uppgift 5

**Lösning:** Givet: Ljudintensitetsnivå  $\beta = 40$  dB på avstånd  $d = 1$  m. Membranradie  $r = 1$  mm.

Sökt: Membranets maxhastighet  $v_{\max}$ .

Intensiteten  $I_d$  på avstånd  $d$  ges av

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB} = \{I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2\} = 10^{-8} \text{ W/m}^2.$$

Denna är spridd över en sfär med radie  $d$ , vilket ger effekten

$$P = I_d A_d = I_d \cdot 4\pi d^2.$$

Effekten ska vara lika stor vid membranet, vilket där ger intensiteten

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{I_d 4\pi d^2}{\pi r^2} = 4I_d \frac{d^2}{r^2}.$$

Om vi antar att membranet rör sig sinusformat kan vi få ett uttryck för maxhastigheten.

$$x = a \sin(\omega t), \quad v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos(\omega t) \Rightarrow v_{\max} = a\omega$$

Detta kan vi relatera till intensiteten med

$$I_m = \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{a^2 \omega^2} = \sqrt{\frac{2I_m}{Z}} = \frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}}.$$

Med akustiska impedansen  $Z = 420 \text{ kg/(m}^2\text{s)}$  för luft ger detta membranets maxhastighet  $v_{\max} = 14 \text{ mm/s}$ .

Dimensionskontroll:

$$\left[ \frac{d}{r} \sqrt{\frac{8I_d}{Z}} \right] = \frac{\text{m}}{\text{m}} \sqrt{\frac{\text{W/m}^2}{\text{kg/(m}^2\text{s)}}} = \sqrt{\frac{\text{Ws}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \{E = \frac{1}{2}mv^2\} = \sqrt{\frac{\text{kg(m/s)}^2}{\text{kg}}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Enheten på svaret blev alltså m/s som den skulle.

Fråga: Varför tar vi bara hänsyn till ena sidan av membranet?

**Snödämpning – I 2003-01-13 uppgift 3**

**Lösning:** Givet:  $I = \frac{P}{4\pi r^2} e^{-ar}$ ,  $a = 0.12/\text{m}$ . Logaritmlagar:

$$\begin{aligned}\log(a) + \log(b) &= \log(ab) \\ \log(a) - \log(b) &= \log(a/b) \\ n \log(a) &= \log(a^n)\end{aligned}$$

Sökt:  $\beta_1 - \beta_2$  och  $\beta_2 - \beta_3$ , där 1, 2 och 3 betecknar avstånden  $r_1 = 10$  m,  $r_2 = 20$  m respektive  $r_3 = 40$  m.

Ljudintensitetsnivåskillnaden ges av

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} - \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_0} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \cdot 10 \text{ dB}.$$

Vi behöver alltså kvoten mellan intensiteterna,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{4\pi r_1^2} e^{-ar_1}}{\frac{P}{4\pi r_2^2} e^{-ar_2}} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)}.$$

Detta ger

$$\beta_1 - \beta_2 = \log_{10} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{a(r_2 - r_1)} \right) \cdot 10 \text{ dB} = \left( 2 \log_{10} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + a(r_2 - r_1) \log_{10} e \right) \cdot 10 \text{ dB},$$

där den första termen i parantesen är det vanliga avståndsberoendet för ljudintensitetsnivån och den andra termen beror på dämpningen. Skillnaden i ljudnivå mellan 10 och 20 m är alltså

$$\beta_1 - \beta_2 = 11.2 \text{ dB},$$

och skillnaden mellan 20 och 40 m är

$$\beta_2 - \beta_3 = 16.4 \text{ dB}.$$

**Högtalarkraft – BDMTI 2010-06-03 uppgift B2**

**Lösning:** Givet: Ljudintensitetsnivå  $\beta = 65$  dB på avstånd  $d = 2$  m. Membranyta  $A_m = 10 \text{ cm}^2$ .

Ljudintensiteten på avstånd  $d$  är

$$I_d = I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB},$$

där  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ . Den är spridd över arean

$$A_d = 4\pi d^2,$$

vilket kräver effekten

$$P = A_d I_d.$$



Intensiteten vid membranet är då

$$I_m = \frac{P}{A_m} = \frac{4\pi d^2 I_d}{A_m}.$$

Detta ger maxtrycket,

$$I_m = \frac{p_{\max}^2}{2Z} \Rightarrow p_{\max} = \sqrt{2ZI_m} = \sqrt{\frac{8\pi Z d^2 I_d}{A_m}},$$

där den akustiska impedansen för luft är  $Z = 420 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ . Från detta kan vi beräkna maxkraften som membranet utövar på luften,

$$F = p_{\max} A_m = \sqrt{8\pi Z d^2 A_m I_0 \cdot 10^{\beta/10} \text{ dB}} = 12 \text{ mN}.$$

### Ohyra – MBDTI 2010-05-29 uppgift A4

**Facit:** Samband mellan hastighet och förskjutning är

$$s = s_0 \sin(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \omega s_0 \cos(\omega t - kx + \delta) \Rightarrow v_{\max} = \omega s_0,$$

och ur detta fås att  $s_0 = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi f} = 1.6 \text{ }\mu\text{m}$ .

### Maskinring – F 2009-05-18 uppgift A3

**Facit:** Förändringsfaktorn = 19/20 vilket motsvarar -0,22 dB. Alltså 78,4 dB. Talet kan naturligtvis också beräknas genom att räkna ut intensiteten, multiplicera med 19/20 och sedan beräkna ljudintensitetsnivån.

### Summer – I 2000-01-11 uppgift 3

**Lösning:** Givet: (1 före, 2 efter förändringarna) frekvenser  $f_1 = 600 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 900 \text{ Hz}$ , membranarea  $A_2 = 2A_1$ , amplitud  $a_2 = 1.5a_1$ , ljudintensitetsnivå  $\beta_1 = 54 \text{ dB}$ .

Sökt:  $\beta_2$

Skillnaden i ljudintensitetsnivå är

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = \left( \log_{10} \left( \frac{I_{d2}}{I_0} \right) - \log_{10} \left( \frac{I_{d1}}{I_0} \right) \right) \cdot 10 \text{ dB} = \log_{10} \left( \frac{I_{d2}}{I_{d1}} \right) \cdot 10 \text{ dB}, \quad (1)$$

där  $I_{d1}$  och  $I_{d2}$  är intensiteterna på ett avstånd  $d$  där mätningen utfördes. Dessa intensiteter fås ur effekten från membranet med ekvation  $I_d = \frac{P}{4\pi d^2}$ . Effekten fås från intensiteten  $I_m$  vid membranet som

$$P = AI_m = A \frac{1}{2} a^2 \omega^2 Z. \quad (2)$$

Detta ger

$$\frac{I_{d2}}{I_{d1}} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2 a_2^2 \omega_2^2 Z}{A_1 a_1^2 \omega_1^2 Z} = 10.1, \quad (3)$$

vilket ger  $\Delta\beta = \log_{10}(10.1) \cdot 10 \text{ dB} = 10 \text{ dB}$  och vidare

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta = 64 \text{ dB} \quad (4)$$

**Ekolod – I 2002-03-05 uppgift 3**

**Facit:** Intensiteten ges av  $I = a^2\omega^2\rho c/2$ . Om amplitud och frekvens hålls konstanta är det bara  $\rho c$  som ändras. För luft är denna  $430 \text{ kg/m}^2\text{s}$  och för vatten  $1.3 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2\text{s}$  (se exvis sid 349 i Benson). Intensiteten förstärks alltså med en faktor som är kvoten mellan dessa dvs den blir  $0.15 \text{ W/m}^2$

# Elektrostatik (kap. 21-23)

## 1 Övningsuppgifter

### Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2

**Tema:** Garnfornässörer

Den snabba mekaniska hanteringen av garn gör att en hel del trådfragment slits loss och virvlar runt i lokalen (=det dammar). Detta består ofta av trådar med längd runt en cm, diameter runt 20  $\mu\text{m}$ , densitet ca 500  $\text{kg/m}^3$  och får en statisk laddning till beloppet motsvarande ca en miljon elektronladdningar per tråd. En idé vore kanske att attrahera dem elektriskt. Vilken storleksordning på elektrisk fältstyrka behövs för att dessa ska styras av ett elektriskt fält med 100 ggr större kraft än tyngdkraften på dem? Går detta tror Du?

### Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2

**Tema:** Cyklism

Ett sätt att klara belysningen med lägre spänningskrav är att använda lysdioder. I en sådan alstras ljuset i ett mycket litet område där det statiska elektriska fältet varierar som  $E_x(x) = E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2)+1}$  där  $x_0 = 3.0 \mu\text{m}$  ( $x = 0$  ligger precis i det mest lysande området). Hur stort blir det maximala värdet på  $E$  om spänningsfallet över området ska vara 1.2 V?

### Åskmoln – F 2011-?

I åskmoln uppstår laddningsseparation, som i sin tur kan orsaka blixtar. I ett försök att ta reda på hur laddningsfördelningen uppstår mättes det elektriska fältet på två olika höjder vid botten i molnet. På 2150 m höjd var det 47.1 kV/m och på 2210 m höjd 36.4 kV/m. Fältet var i båda fallen riktade rakt uppåt. Hur stor är laddningstätheten i denna del av molnet?

### Nervtrådsloop – MiT 2014-10-29 uppgift B3

**Tema:** Nobelprisen i fysik och kemi 2014

Betrakta en nervtråd som går i en loop (cirkel) med radie  $r = 1 \mu\text{m}$ . Antag i denna uppgift att det finns fyra statiska laddade domäner med vardera laddningen  $Q$  på jämna avstånd fördelade över nervtrådsloopen som har radie  $R$ . Hur mycket större eller mindre är  $E$ -fältet på avståndet  $R$  från en av

domänerna utanför loopen (välj själv lämplig riktning), jämfört med om alla de fyra domänerna hade befunnit sig i loopens mitt

### Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3

**Tema:** Visioner på utställningar

Det statiska fältet från ett laddat föremål beror ju väldigt mycket på föremålets form. Om föremålet är en ring och den är likformigt laddad blir ju fältet i mitten av ringen noll. Var utmed symetriaxeln (uttryckt i ringens radie) blir fältet störst?

## 2 Extrauppgifter

### Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1

**Tema:** Skarvning av optiska fibrer

Före skarvning måste de bågge ändytorna behandlas så att de är helt rena. Detta kan ske genom kvarvarande lösa partiklar på ändytorna avlägsnas elektrostatiskt. Man utnyttjar då att de flesta tänkbara föroreningar är elektriska dipoler, med dipolmoment  $10^{-29}$  Cm (storleksordning). Den kraft de sitter fast med är ca  $10^{-20}$  N. Man vill inte använda fält starkare än  $10^5$  V/m. Fältet kommer från en trådladdning som i sammanhanget kan betraktas som lång. Hur nära måste man komma med trådladdningen (enbart storleksordning efterfrågas)?

### Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1

**Tema:** Head up TV

Om den lilla TV'n innehåller ett bildrör (som en vanlig TV) kommer detta att behöva en elektron-kanon som ger elektroner med hög energi. Antag att de lämnar en negativ elektrod på potentialen -100 V utan hastighet och leds genom en ringelektrod med potentialen -10 V. Vilken fart har de då de passerar ringelektroden?

### Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4

**Tema:** Skansen

Många djurparker (och bönder) använder elstängsel för att hålla djur och människor åtskiljda. En del anser att djuren aldrig behöver nudda stängslet för att hålla sig borta utan att de i stället känner fältet runt det. Antag att man har två trådar bredvid (i sidledd) varandra på ngn cm avstånd, trådarna har motsatt laddning (en plus och en minus). Ungefär hur mycket starkare är fältet på 3 dm avstånd jämfört med på 1 m?

### Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2

**Tema:** Miljövård

I elektrostatisk rökgasrening vill man skapa ett fält som är kraftigt inhomogent (för att attrahera dipolerna i röken). Detta görs ofta med hjälp av trådladdningar som löper i z-riktningen. Två positiva trådladdningar i linjerna genom (0,0)cm och (0,1)cm och två negativa genom (1,1)cm och (1,0) cm. Plotta fältets belopp utefter linjen (som ges på parameterform)

$$\begin{aligned}x &= t \\y &= 0.50 \text{ cm} \\z &= 0\end{aligned}$$

Graderade axlar

### Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1

**Tema:** Proaktiv säkerhet i bilar

Hur beror kraften mellan två elektriska dipoler på avståndet mellan dem om de kan rotera fritt men inte förflytta sina tyngdpunkter?

## 3 Lösningar

### Garnfragment – MTI 2001-04-27 uppgift 2

**Lösning:** Fragmenten har en densitet  $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$  och volym

$$V = 1 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{4} (20 \text{ }\mu\text{m})^2 = 3.1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3, \quad (5)$$

vilket ger massan  $m = \rho V$  och tyngdkraften

$$F_g = mg = \rho V g, \quad (6)$$

där  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  är tyngdaccelerationen.

Kraften från ett elektriskt fält  $E$  blir  $F_E = 10^6 e E$  där  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  är elementarladdningen (= -elektronladdningen). Från  $F_E = 100 F_g$  får vi då

$$10^6 e E = 100 \rho V g \Rightarrow E = \frac{\rho V g}{10^4 e} \approx 10 \text{ MV/m} \quad (7)$$

Luften har ett överslagsfält på ungefär  $2 \text{ MV/m}$  så denna fältstyrka skulle inte kunna upprätthållas.

### Lysdiod – MT 1999-06-02 uppgift 2

**Lösning:** Spänningen kan fås genom att integrera det elektriska fältet. Vi gör detta längs  $x$ -axeln eftersom det är  $x$ -komponenten av det elektriska fältet vi känner till. Integrationsgränserna är okända men mycket större än  $x_0$ , så vi kan välja  $\infty$ .

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} E_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \frac{1}{(x^2/x_0^2) + 1} dx \quad (8)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x/x_0 \\ dx = x_0 du \end{array} \right\} = E_0 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (9)$$

$$= E_0 x_0 [\arctan(u)]_{-\infty}^{\infty} = E_0 x_0 \pi \quad (10)$$

Med  $U = 1.2$  V får vi styrkan på E-fältet

$$\max(E) = E_0 = \frac{U}{\pi x_0} = 130 \text{ kV/m.} \quad (11)$$

### Åskmoln – F 2011-?

**Facit:** Fältet antas vara vertikalt och bara bero av höjden. Vi använder en ytan på en vertikal cylinder  $S$  som gaussyta. Den undre ändytan är på höjd  $h_1 = 2150$  m och den övre på  $h_2 = 2210$  m. E-fälten är på dessa ytor  $E_1 = 47.1$  kV/m respektive  $E_2 = 36.4$  kV/m. Gauss sats ger

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

där  $Q$  är laddningen innesluten av ytan  $S$ . Bidraget till integralen från mantelytan är 0 eftersom fältet där är vinkelrätt mot ytan. Det som är kvar är alltså bara bidraget från de två ändytorna

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_2 A - E_1 A,$$

där  $A$  är arean på ändytorna. Laddningstätheten blir då

$$\rho = \frac{Q}{A(h_2 - h_1)} = \frac{\epsilon_0(E_2 A - E_1 A)}{A(h_2 - h_1)} = \epsilon_0 \frac{E_2 - E_1}{h_2 - h_1} = \underline{-1.6 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3}.$$

### Nervtrådsloop – MiT 2014-10-29 uppgift B3

**Facit:** Sätt in cirkeln med radie  $R$  i ett koordinatsystem med origo i cirkelns mittpunkt. Då befinner sig laddningarna i punkterna  $(R, 0)$ ,  $(0, R)$ ,  $(-R, 0)$  och  $(0, -R)$ . Uppgiften består i att räkna ut E-fältet i en punkten  $(2R, 0)$ , och jämföra med fallet då laddningarna alla är i origo. (Man kan också välja en annan punkt än  $(2R, 0)$ , som också uppfyller förutsättningarna, om man nu föredrar det.) För E-fältet från en punktladdning ges beloppet av:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Avståndet till närmsta laddning är  $R$ , och till den längst bort (andra sidan loopen)  $3R$ . Till de två övriga ges avståndet av Pytagoras till  $\sqrt{R^2 + (2R)^2} = \sqrt{5}R$  Komponenterna i x-led blir

$$E \cos \theta = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{5}R}$$

Summerar vi de fyra komponenterna får vi

$$E_{tot} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 + \frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{9} \right) \approx 1,47 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Jämför vi nu med från  $4Q$  placerade i origo, dvs alla på avståndet  $2R$  får vi:

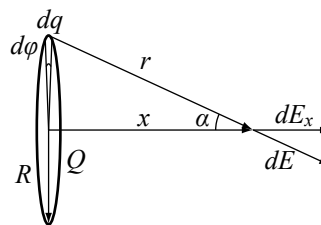
$$E_{tot} = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Alltså, det blir ca 47% större fält från fyra laddning på loopens jämfört med i mitten.

### Ringladdning – TMI 2008-03-10 uppgift B3

**Lösning:**

Av symmetriskäl kommer det elektriska fältet vara parallellt med ringens symmetrilinjen (x-axeln i figuren). Bidraget till x-komponenten av E-fältet från en liten del av ringen med laddning  $dq$  och vinkel  $d\phi$  är



$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} = \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Totala fältstyrkan får vi genom att integrera längs ringen,

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{Q \frac{d\phi}{2\pi} x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Fältet är som starkast där derivatan är 0.

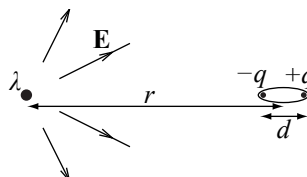
$$0 = \frac{dE}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - x2x \frac{3}{2}(x^2 + R^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2)^3}$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + R^2 - 3x^2 \Rightarrow x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

### Dipolsmuts – I 2001-10-26 uppgift 1

**Lösning:**

Givet:  $p = qd = 10^{-29}$  Cm  
 $|F| = 10^{-20}$  N  
 $E = 10^5$  V/m  
 Sökt:  $r$



E-fältet från en linjeladdning är

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Kraften på dipolen blir då

$$F = F_- + F_+ = -qE(r - d/2) + qE(r + d/2)$$

$$= q \left( \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0(r - d/2)} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(r + d/2)} \right)$$

$$= \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{-(r + d/2) + r - d/2}{(r - d/2)(r + d/2)} \approx_{d \ll r} \frac{-q\lambda d}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-Eqd}{r} = \frac{-Ep}{r}.$$

Från detta kan vi få avståndet som ger rätt kraft och E-fält.

$$r = \frac{Ep}{|F|} = 0.1 \text{ mm}$$

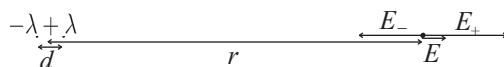
### Bildrör1 – MT 1998-05-28 uppgift 1

**Facit:** Elektronerna passerar ett spänningsfall på 90V och deras hastighet ges av

$$q_e V = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_e V}{m}} = 5.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

### Elstängsel – F 2007-06-04 uppgift 4

**Lösning:**



Det elektriska fältet på avstånd  $r$  enligt figuren ges av summan av fältet från den positiva och den negativa trådladdningen med  $k = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$

$$E = E_+ - E_- = \frac{k}{r - d/2} - \frac{k}{r + d/2} \tag{12}$$

$$= k \frac{r + d/2 - (r - d/2)}{(r - d/2)(r + d/2)} = \frac{kd}{r^2 - d^2/4} \approx \frac{kd}{r^2} \tag{13}$$

eftersom  $d \ll r$ .

Kvoten mellan fältet på avstånd  $r_1 = 0.3$  m och  $r_2 = 1$  m blir då

$$\frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{kd/r_1^2}{kd/r_2^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 11 \tag{14}$$

### Rökgasrening – MTI 2002-08-23 uppgift 2

**Facit:** y- och z-komp blir noll pga symmetri. Sätt sedan i beräkningen  $1\text{cm} = 2a$

Fältet från de positiva laddningarna blir då

$$E_+ = 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + x^2}} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{a^2 + x^2}$$

Den sista faktorn är trigonometrik för att få x-komp

Pss

$$E_- = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{2a - x}{(2a - x)^2 + a^2}$$

Dessa ska sedan läggas ihop och plottas

### Dipolattraktion – FCL 2009-06-04 uppgift B1

**Lösning:** Dipolerna kommer att ställa in sig på linje. Fältet från den ena blir då

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$



Kraften på den andra dipolen kan då fås genom att bilda skillnaden mellan beloppen av krafterna på plusladdningen och på minusladdningen

$$\begin{aligned}\Delta F &= q(E(L) - E(L + d)) = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 L^3} - \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 (L + d)^3} \\ &= \frac{qp(L^3 + 3L^2d + 3Ld^2 + d^3)}{2\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} - \frac{qpL^3}{2\pi\epsilon_0 L^3(L + d)^3} \\ &= \frac{3qpL^2d + \dots}{2\pi\epsilon_0 L^6} = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0 L^4},\end{aligned}$$

där småtermer pga  $d \ll L$  försumrats. Alltså omvänt proportionell mot avståndet upphöjt till 4.

# Kondensatorer (kap. 24-26)

## 1 Övningsuppgifter

### Oljenivåmätare – I 2002-03-05 uppgift 1

**Tema:** Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

När man vill mäta hur full en oljetank är gör man det ofta genom att i tanken montera ett par parallella plattor och sedan mäta hur kapacitansen mellan dem förändras när utrymmet mellan dem är mer eller mindre fyllt av olja. Antag att plattavståndet är 10 mm, plattbredden 120 mm och plattornas höjd är 8.0 m. Oljans  $\epsilon_r = 5.6$ . Hur beror kapacitansen mellan plattorna av oljenivån?

Plotta  $C$  som funktion av oljans höjd (dvs 0 till 8 m) i ett stort diagram med graderade axlar.

### Gnista – I 2003-01-13 uppgift 1

**Tema:** Vinterkyla

Vid kallt väder ökar problemen med statisk elektricitet i vardagslivet. Man brukar säga att det beror på att inomhusluften är torrare.

Detta gör att mycket av vår elektroniska utrustning lever farligt. Uppskatta (storleksordning räcker) hur stor energi en gnista som slår mellan en fingertopp och en vattenkran innehåller. Gnistan kommer då fingret är 9 mm från kranen.

### Kondensatormikrofon – MT 2005-06-01 uppgift 2

**Tema:** Rockfestivaler

En typ av mikrofon bygger på att man har en kondensator där ljudet får den ena av plattorna att vibrera. Spänningen mellan plattorna hålls konstant till 12 V, och kondensatorns kapacitans i vila är 11  $\mu\text{F}$ . Vilken ström ger den upphov till om plattavståndet varierar mellan 0.495 mm och 0.505 mm?

Antag att frekvensen är 500 Hz.

### Givarsignal – I 2005-01-11 uppgift 2

**Tema:** Industriell positionering

Signalerna från givare av olika slag är ofta mycket svaga och snabba. För att minska störningsrisken leds de ofta genom koaxialkablar. Hur lång får en sådan

vara om den har kapacitansen 80 pF/m och resistansen 0.04 ohm/m och man vill överföra störningar som varierar på 100 ns?

(OBS enheterna)

## Pixelkondensator – I 2002-01-09 uppgift 2

**Tema:** Digitala high-end-kameror

Varje bildpunkt i bildchipet är en liten kondensator, där man vill maximera energi per volym. Hur inverkar plattavstånd, plattstorlek och isoleringsmaterial på detta? Vilka parametrar på isoleringsmaterialet är avgörande? (2 st)

## 2 Extrauppgifter

### Alkometer – FCL 2009-06-04 uppgift A2

**Tema:** Proaktiv säkerhet i bilar

Man måste i apparaten (alkometern) kolla att det verkligen är utandningsluft som passerar och det gör man genom att mäta temperatur, koldioxid och luftfuktighet på den gas som passerar. Luftfuktigheten mäts genom att luften passerar mellan plattorna i en plattkondensator som ska ha spänningen 12 V. Plattarean är 8.0 cm<sup>2</sup>. Hör hög kan kapacitansen göras om man maximalt vill ha ett E-fält som ligger på 50 kV/m?

### Koaxialkabel – I 1999-10-22 uppgift 4

**Tema:** Elektronikmaskföretaget Micronic

Den elektriska signal som driver den akustooptiska modulatorens har samma frekvens som ultraljudet, dvs ganska hög. Man vill leda denna i en koaxialkabels innerledare med radie  $r$ .

Kabelns längd är  $L$ . I en provuppställning visar sig kretsen blir för långsam (=ha för stor tidskonstant) och man lyckas då reducera längden med 25% (dvs till 75% av utgångsvärdet) och öka radien  $r$  med 50%. Ytterledarens radie förändras inte utan är hela tiden = dubbla den ursprungliga innerradien. Hur mycket snabbare blir kretsen?

### Tjuvstartssensor – MTI 2008-08-18 uppgift A2

**Tema:** Resultatmätning vid idrottsevenemang

Tjuvstartssensorerna (som vållat mycket diskussion och vredesutbrott på tidigare OS) är ofta kapacitiva, dvs sprintern trycker med foten på startblocket som därvid trycker ihop plattorna i en plattkondensator som hålls vid konstant spänning. Om foten rör sig ändras plattavståndet och en ström går då genom ledningen fram till kondensatorn. Antag ett plattavstånd på 4.0 mm obelastad, 3.0 mm då foten trycker mot plattan och 2.0 mm då foten gör avstamp samt en plattarean på 4.0 cm<sup>2</sup>. Hur stor ström (i genomsnitt) går det då i ledningen om foten trycker till (3 mm till 2 mm) på 0.01 s. Det är luft mellan plattorna. Spänningen är hela tiden 10V. RC-konstanten för kretsen är sådan att den inte spelar någon roll för resultatet.

### Plattkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A4

**Tema:** Fjärrkontroller

I fjärrkontroller (precis som i all annan elektronik) ingår kondensatorer som man vill göra så små som möjligt. Antag att de görs i form av plattkondensatorer och ska tåla 3 V. Överslagsfältet i isolatormaterialet är 3.2 MV/m och  $\epsilon_r = 5.6$ . Hur små kan de göras om de ska ha kapacitansen 0.5 pF? (Du behöver inte tänka på säkerhetsmarginaler utan räkna fram gränsvärdet!)

### Cylinderkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B2

**Tema:** Fjärrkontroller

Antag att det i A4 (plattkondensator) är en cylinderkondensator i stället (mer realistiskt), där skillnaden mellan  $r_i$  och  $r_y$  inte kan vara mindre än 2% av  $r_i$  och cylinderns längd är fix till  $5 r_i$ . Vad blir då  $r_i$  och  $h$  i den minsta kondensator som uppfyller de elektriska kraven i A4?

## 3 Lösningar

### Oljenivåmätare – I 2002-03-05 uppgift 1

**Lösning:**

Totala kapacitansen är summan av kapacitansen för delen av plattkondensatorn som är i oljan och delen i luften. Vi kan betrakta systemet som en parallellkoppling av dessa två plattkondensatorer. Kapacitansen för oljedelen är

$$C_o = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A_o}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{xb}{d},$$

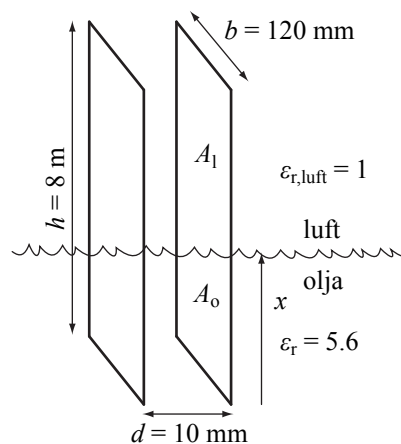
och för luftdelen

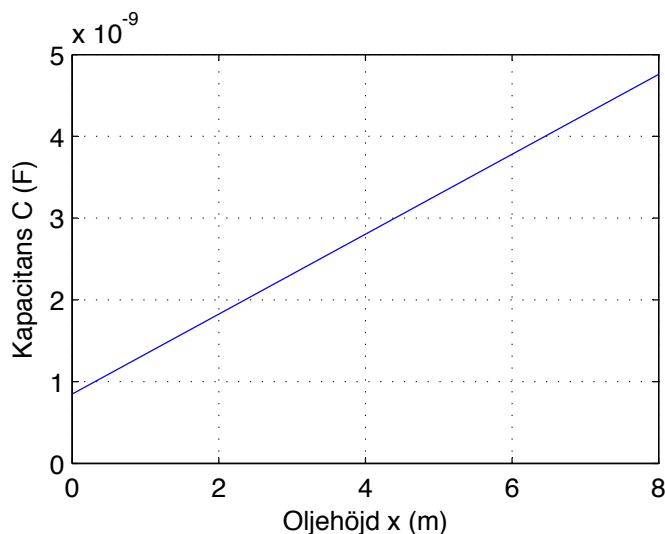
$$C_l = \epsilon_0 \epsilon_{r,\text{luft}} \frac{A_l}{d} = \epsilon_0 \frac{(h-x)b}{d}.$$

Totala kapacitansen blir då

$$C = C_o + C_l = \frac{\epsilon_0 b}{d} (x \epsilon_r + h - x) = \frac{\epsilon_0 b h}{d} + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) b}{d} x$$

Detta är en linjär funktion som går från  $C(0 \text{ m}) = \frac{\epsilon_0 b h}{d} = 0.85 \text{ nF}$  till  $C(8 \text{ m}) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r b h}{d} = 4.8 \text{ nF}$ .





### Gnista – I 2003-01-13 uppgift 1

**Lösning:** För att det ska slå en gnista måste det elektriska fältet komma upp i överslagsfältet som i luft är  $E_B \approx 2 \text{ MV/m}$ . Betrakta fingertopp och vattenkran som en kondensator med area  $A = 1 \text{ cm}^2$  och plattavstånd  $d = 9 \text{ mm}$ . Den relativa permitiviteten hos luft är  $\epsilon_r \approx 1$ . Den lagrade energin innan överslag är då

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{d}(E_B d)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 A E_B^2 d = 16 \text{ } \mu\text{J}. \quad (15)$$

### Kondensatormikrofon – MT 2005-06-01 uppgift 2

**Lösning:** Antag att plattavståndet varierar sinusformat,

$$d = d_0 + d_1 \sin(2\pi ft). \quad (16)$$

Parametrarna blir då  $d_0 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 5 \text{ } \mu\text{m}$  och  $f = 500 \text{ Hz}$ . Kapacitansen hos kondensatorn ges av

$$C = \epsilon_0\epsilon_r \frac{A}{d} \quad (17)$$

och varierar därmed med tiden. Detta gör att laddningen  $Q = CU$  i kondensatorn varierar i tiden vilket i sin tur ger upphov till en ström  $I$ .

$$I = \frac{dQ}{dt} = U \frac{dC}{dt} = U \frac{dC}{dd} \frac{dd}{dt} = -U \frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d^2} 2\pi f d_1 \cos(2\pi ft) \quad (18)$$

$$\approx -U \frac{C}{d_0} 2\pi f d_1 \cos(2\pi ft) = -4.1 \text{ mA} \cdot \cos(2\pi ft) \quad (19)$$

### Givarsignal – I 2005-01-11 uppgift 2

**Lösning:** Givet:  $r = \frac{R}{L} = 0.04 \text{ } \Omega/\text{m}$

$c = \frac{C}{L} = 80 \text{ pF/m}$

$t = 100 \text{ ns}$

Sökt: Maximal längd  $L$  så att  $\tau_{RC} \leq t$ .

Se kabeln som en RC-krets.

### Pixelkondensator – I 2002-01-09 uppgift 2

**Facit:** Energin per volym ges av

$$w_E = \epsilon_0 \epsilon_r E^2 / 2$$

dvs den beror ej av plattstorlek eller plattavstånd. Däremot kommer relativa permittiviteten in. Vidare är det maximala E-värdet det som ges av  $E_{\text{överslag}}$ , dvs överslagshållfastheten.

### Alkometer – FCL 2009-06-04 uppgift A2

**Facit:**  $d = \frac{U}{E_{\text{överslag}}}$  och  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \frac{\epsilon_0 1 S E_{\text{överslag}}}{U} = 30 \text{ pF}$

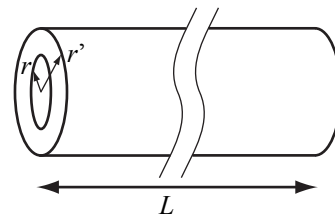
### Koaxialkabel – I 1999-10-22 uppgift 4

**Lösning:**

Givet:  $L_2 = 0.75L_1$  (1 före, 2 efter),  $r_2 = 1.5r_1$ ,

$r' = 2r_1$ .

Sökt:  $\frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}}$



Tidskonstanten för kabeln är  $\tau_{RC} = RC$ . Kapacitansen för cylinderkondensator är

$$C = L \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r)} \quad \text{Young and Freedman s. 820}$$

Resistansen är

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho L}{\pi r^2}$$

där  $\rho$  är resistiviteten i ledningsmaterialet.

Den sökta kvoten blir då

$$\frac{\tau_{RC,1}}{\tau_{RC,2}} = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} = \frac{\frac{\rho L_1}{\pi r_1^2} L_1 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r_1)}}{\frac{\rho L_2}{\pi r_2^2} L_2 \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r'/r_2)}} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{\ln(r'/r_2)}{\ln(r'/r_1)} = 1.66$$

Sladden blir alltså 66% snabbare.

### Tjuvstartssensor – MTI 2008-08-18 uppgift A2

**Facit:** Vi har här en kondensator där  $C$  vid konstant spänning.

$$\Delta Q = U \Delta C = \epsilon_0 S U \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) = 5.9 \cdot 10^{-12} \text{ As} \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 0.59 \text{ nA}$$

**Plattkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A4**

**Facit:** Plattavståndet  $d$  kan inte väljas mindre än det som ger överslag vid 3V, vilket är 0.93  $\mu\text{m}$ . Då fås

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \Rightarrow S = \frac{dC}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 9.4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

dvs sidan ska vara ungefär 0.1 mm.

**Cylinderkondensator – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B2**

**Lösning:** För en cylinderkondensator blir fältet mellan ledarna

$$E = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

och kapacitansen

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(r_y/r_i)}$$

Vi kan anta att antingen

- $r_y > 1.02r_i$  och att  $E_{\max}$  uppnås vid innerledaren vid  $U_{\max}$  (om det inte gäller kan vi ju minska volymen). Eller
- $r_y = 1.02r_i$ . Om detta gäller kan vi inte längre minska volymen med konstant kapacitans.

Låt os anta att det första gäller. Då får vi att

$$E_{\max} = \frac{Q_{\max}}{10\pi\epsilon_0\epsilon_r r_i^2}$$

$$Q_{\max} = CU_{\max} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r 5r_i}{\ln(r_y/r_i)} U_{\max}$$

vilket ger att

$$\ln\left(\frac{r_y}{r_i}\right) = \frac{U_{\max}}{E_{\max} r_i}$$

Detta kan vi sätta in i formeln för kapacitans och lösa ut  $r_i$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\frac{U_{\max}}{E_{\max} r_i}}$$

$$r_i = \sqrt{\frac{CU_{\max}}{10\pi\epsilon_0\epsilon_r E_{\max}}}$$

Det ger oss  $r_i = 17.35 \mu\text{m}$ , samt att  $r_y = 1.0555r_i$  vilket visar att det första antagandet var korrekt.

(Den som istället "skär upp och rullar ut" cylinderkondensatorn och räknar på det som en plattkondensator får  $r_i = 17.37 \mu\text{m}$ )

# Magnetism (kap. 27-28)

## 1 Övningsuppgifter

### Magnetseparation – BD 2009-05-27 uppgift A2

**Tema:** Mineralogiska undersökningsinstrument

Vid separation av magnetiskt och ickemagnetiskt material används ofta fält från korta spolar runt det löpande band där man matar fram materialet. Hur stort blir fältet från två plana, korta spolar placerade så att deras axlar sammanfaller? Radien är 2.0 dm och de är placerade 2.2 dm från varandra. Antalet varv per spole är 200 och strömmen är 2.4 A. Beräkna fältet i den punkt som ligger mitt emellan spolarna. Fältbidragen från bägge spolar är riktade åt samma håll.

### Startmotor – MPTIL 2004-04-21 uppgift 5

**Tema:** Sensorer och instrument i bilar

Ett av de större amerikanskägda ”svenska” bilmärkena fick för några år sedan problem med en mediadiskussion runt huruvuda magnetfältet från kablaget var farligt.

Uppskatta magnetfältet från en ledare som strömförsörjer startmotorn. (Returledning sker genom karossen så den behöver vi inte bekymra oss om)

Volvo har 12 V system och startmotorn kan utveckla bråkdelen av 1 kW.

### Faradayrotator – MTI 2000-06-06 uppgift 2

**Tema:** Altitun

När man använder halvledarlasrar i telesammanhang används ofta faradayrotatorer för att hindra reflexer från att komma tillbaka in i lasern. Dessa består av en spole lindad runt en optisk fiber. Fältet inuti spolen (dvs där fibern är) måste vara av storleksordning 0.5 T, dvs ganska starkt. Föreslå en spoltyp (lång, kort, toroid...?) om man vill att så lite som möjligt av fältet ska läcka ut. Hur många varv per meter ska den ha om tvärsnittsarean ska vara 8.0 mm<sup>2</sup>?  $I = 1$  A.

Fibern omöjliggör järnkärna.

### Bildrör 2 – MT 1998-05-28 uppgift 2

**Tema:** Head up TV



[I problemet innan beräknades elektronernas hastighet till  $5.6 \cdot 10^6$  m/s.]

Antag att man vill böja av dem  $\pm 30^\circ$  genom ett magnetfält vinkelrätt mot deras rörelseriktning. Detta alstras mellan två plattor som har längden 8 mm (utefter elektronernas ursprungliga rörelseriktning). Hur starkt behöver magnetfältet vara?

## Hastighetsmätare – I 2000-01-11 uppgift 2

**Tema:** Instrumentpaneler till tyngre fordon

Föregångaren till dagens hastighetsmätare (som ju är en del av instrumentpanelen) var ett vridspoleinstrument, där en liten fjäderbelastad elektromagnet får vrida sig i fältet från en hästskeformad permanentmagnet. Hur stort blir det maximala vridmomentet på en elektromagnet med tvärsnittsytan  $1.6 \text{ cm}^2$ , 100 varv, järnkärna med  $\mu_r$  (fältförstärkning) = 500, om strömmen genom den är 78 mA och permanentmagnetens fält är 0.17 T?

## Magnetaccelerator – MT 1999-04-15 uppgift 1

**Tema:** Industriell biofysik

Följande är klippt ur en dagstidning (som vi av uppenbara skäl inte ska avslöja namnet på). När man läser texten begriper man omedelbart att reportern måste ha missuppfattat någonting. Vad?

”... i denna typ av instrument accelereras elektronerna från ca 10 m/s till mer än 1000 m/s mha ett konstant magnetfält på ca 2 T. ...”

## 2 Extrauppgifter

### Växtmagnet – MBDTI 2010-05-29 uppgift A5

**Tema:** Växthus

En del anser att magnetfält är nyttiga för plantor och en del anser tvärtom. Hur stort blir magnetfältet vid marken från en kort spole med diameter 1.5 m, 1.8 A, och 100 varv utan järnkärna. Spolen befinner sig 2.2 m över mark och du behöver bara beräkna fältet rakt under den. Orientera spolen som du vill.

### Metalldetektor – F 2007-05-18 uppgift 2

**Tema:** Flygplatssäkerhet

Metalldetektorer finns av flera olika typer, men en vanlig består av ett rektangulärt valv som man går igenom. Denna är egentligen en rektangulär spole som man alstrar ett magnetfält i. Man letar sedan efter störningar i detta magnetfält pga metallföremål. Uppskatta storleksordningen på fältet i mitten av denna rektangel om antalet varv är 1200, strömmen 2.75 A och valvet 2 m x 1 m x 0.2 m.

**Tankeläsning – I 2000-10-25 uppgift 4****Tema:** Personidentifiering

En mer sciencefiction-betonad variant är att avläsa de magnetfält strömmarna i hjärnan ger upphov till (tankeläsning fast på riktigt alltså). Dessa strömmar består av laddningspulser på ca 10nC (nanocoloumb) som rör sig med några meter per sekund över sträckor på enstaka cm. Uppskatta storleksordningen på de magnetfält de ger upphov till utanför skallen.

**Spismagnet – IMT 2002-04-12 uppgift 3****Tema:** Restauranter och restaurantkök

En gammaldags spisplatta ger upphov till ett ganska kraftigt magnetfält, vilket en del anseer vara en arbetsmiljöfara. Uppskatta storleksordningen på detta magnetfält om en platta drar en ström på 5 A genom en spiralformad ledare med 100 varv. Det innersta har radien 4 cm och den yttersta 30 cm.

**Högtalarmagnet – MBDTI 2010-06-03 uppgift A2****Tema:** Robotdamsugare

Dammsugaren kan prata, dvs den har en högtalare med magnet, som rör sig fram och tillbaka när den anger ljud. Detta är en permanentmagnet som är märkt 0.078 T, dvs precis intill magneten är fältet så starkt. Hur starkt är fältet 2.0 cm från magneten som har diametern 1.0 cm och är platt (dvs har försumbar tjocklek)?

Ledning: Kanske liknar detta en kort spole på något sätt?

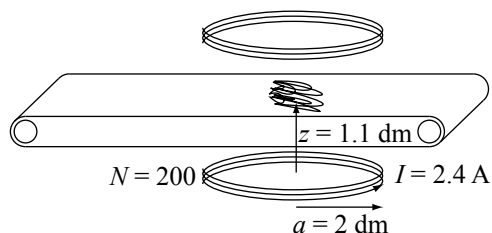
**3 Lösningar****Magnetseparation – BD 2009-05-27 uppgift A2****Lösning:**

Fältet längs symmetriaxeln på en kort spole är

$$B_k = \frac{N\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

I detta fall har vi två spolar som ger samma bidrag så fältet blir dubbelt så stort

$$B = \frac{N\mu_0 I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = 2 \text{ mT}.$$



### Startmotor – MPTIL 2004-04-21 uppgift 5

**Lösning:** Spänningen är  $U = 12 \text{ V}$  och vi kan anta att effekten är  $P \approx 300 \text{ W}$ .  
Från detta får vi strömmen enligt

$$P = UI \Rightarrow I = \frac{P}{U} = 25 \text{ A.}$$

Om vi antar att ledaren är lång och rak och ungefär  $r = 0.5 \text{ m}$  bort får vi magnetfältet

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = 10^{-5} \text{ T.}$$

### Faradayrotator – MTI 2000-06-06 uppgift 2

**Lösning:** Givet:  $B = 0.5 \text{ T}$ ,  $A = 8 \text{ mm}^2$ ,  $I = 1 \text{ A}$ .

Minimalt läckfält får vi med toroidspole. Fältet blir då

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

Antalet varv per längd (omkrets) spole blir då

$$\frac{N}{L} = \frac{B}{\mu_0 I} = 4 \cdot 10^5 \text{ varv/m.}$$

### Bildrör 2 – MT 1998-05-28 uppgift 2

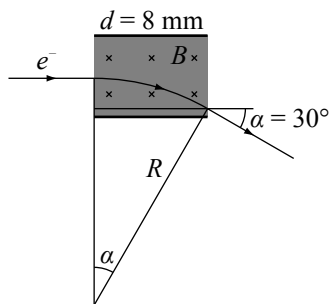
**Lösning:**

Mellan plattorna har elektronerna en bana med krökningsradie

$$R = \frac{m_e v}{eB} \Rightarrow B = \frac{m_e v}{eR},$$

där  $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  är elektronmassan,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  är elementarladdningen och  $v = 5.6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  är elektronernas hastighet. Från figuren kan man se att

$$\sin \alpha = \frac{d}{R} \Rightarrow R = \frac{d}{\sin \alpha} \Rightarrow B = \frac{m_e v \sin \alpha}{ed} = 2.0 \text{ mT}$$



### Hastighetsmätare – I 2000-01-11 uppgift 2

**Lösning:**

Givet: Spole med  $A = 1.6 \text{ cm}^2$ ,  $N = 100$ ,  $\mu_r = 500$ ,  $I = 78 \text{ mA}$  i ett yttre magnetfält  $B = 0.17 \text{ T}$ .

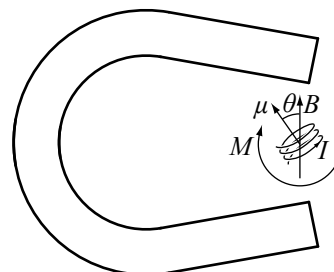
Sökt: Maximalt vridmoment  $M_{\max}$ .

Spolens magnetiska dipolmoment är

$$\mu = NAI\mu_r.$$

Den kommer utsättas för ett vridmoment

$$M = \mu B \sin \theta \Rightarrow M_{\max} = \mu B = NAI\mu_r B = 0.11 \text{ Nm}.$$



### Magnetaccelerator – MT 1999-04-15 uppgift 1

**Facit:** Eftersom kraften ett magnetutfält utövar på en partikel alltid är vinkelrätt mot hastigheten uträttar den ingen effekt, alltså ändras inte hastighetens belopp.

### Växtmagnet – MBDTI 2010-05-29 uppgift A5

**Facit:**

$$B = \frac{\mu_0 N I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 N I R^2}{2(R^2 + h^2)^{1.5}} = 5 \text{ }\mu\text{T}$$

### Metalldetektor – F 2007-05-18 uppgift 2

**Facit:** Det står "uppskatta storlekordning" i taltexten. Det innebär att man får använda ganska grova approximationer, exempelvis kort spole (Lång spole är det däremot absolut inte). Den formel vi har för fältet mitt i en kort spole är

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2r}$$

Har bör då  $r$  väljas till 0.5 m (0.3m till 0.8m accepteras) eftersom kortaste avst till en ledare ar 0.25 m och längsta 1.13 m. Fältet blir då ca 4 mT.

[Kortaste avståndet är 0.5 m, så det är lämpligt att välja 0.6 m.]

### Tankeläsning – I 2000-10-25 uppgift 4

**Facit:** Se det som magnetfältet från en snutt med längd 1cm

$$dB = \frac{\mu_0 \frac{dq}{dt} ds}{4\pi r^2} = \frac{10^{-7} dqv}{r^2} = \frac{10^{-7} \cdot 10^{-8} C \cdot 1m/s}{10^{-2} m^2} = 10^{-13} T$$

Inte världens mest exakta beräkning, men det efterfrågades ju inte heller

**Spismagnet – IMT 2002-04-12 uppgift 3**

**Facit:** Man kan lösa denna uppgift med en mängd olika approximationer. Exakt lösning får man genom att räkna ut antal varv per radieintervall till 100/0.26 m. Magnetfältet från en radiesnutt blir då

$$dB = \frac{\mu_0 I \cdot 100}{2r \cdot 0.26} dr \Rightarrow B = \int_{0.04}^{0.30} \frac{\mu_0 I \cdot 192}{r} dr = 2.4 \text{ mT}$$

Storleksordningen är alltså enstaka mT. Om man lägger alla varven på medelavståndet blir resultatet 1.8 mT vilket ger samma storleksordning.

**Högtalarmagnet – MBDTI 2010-06-03 uppgift A2**

**Facit:** En permanentmagnet består ju av uppriktade magnetiska dipoler som kan beskrivas med en ytström dvs den fungerar precis som en kort spole.

$$B_{\text{nära}} = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{r} \quad B_{\text{nere}} = \frac{\mu_0 \mu_r N I r^2}{(r^2 + h^2)^{1.5}} \Rightarrow B_{\text{nere}} = \frac{r^3}{(r^2 + h^2)^{1.5}} = 1.1 \text{ mT}$$

# Induktion (kap. 29-30)

## 1 Övningsuppgifter

### Induktion – FCL 2009-06-04 uppgift A3

**Tema:** Proaktiv säkerhet i bilar

All utrustning i en bil måste dimensioneras för att tåla de magnetfält som uppkommer runt generator, tändsystem mm. Vilken spänning alstras maximalt i en kvadratisk strömkrets med sidan 5 cm om den påverkas av ett magnetfält med frekvensen 200 Hz?

$$B = B_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad B_0 = 0.17 \text{ T}$$

### Magnetpuls – MTI 2001-06-07 uppgift 1

**Tema:** Företaget Innolite

Den laser man använder för att belysa plasmat så att det ska kunna avge EUV-strålningen är en gaslaser där gasen finns i ett glasrör som i startögonblicket kräver en magnetisk puls av längd enstaka mikrosekunder längsmed röret. Denna skulle kanske kunna åstadkommas genom en 2.2 cm lång spole runt röret lindad med 2000 varv koppartråd. Spolen har tvärsnittsdiаметern 8.1 cm. Lindningstråden har tvärsnittsytan 0.2 mm<sup>2</sup>.

Går detta? (Motivering...)

### Cykellyse – MTI 1999-06-02 uppgift 1

**Tema:** Cyklism

Cykel-lysen är ett ständigt bekymmer. Batteridrivna mattas fort och dynamos av olika slag slirar i blött väder och låter mycket. Ett förslag till lösning bygger på att man monterar små, platta permanentmagneter runt hela fälgen och låter dem löpa mellan ett ok som leder det magnetiska flödet genom en lindning med ett antal varv. Antag att cykelhjulet har 50 st magneter orienterade växelvis åt var sitt håll och att hjulet snurrar 1.5 varv per sekund. Hur många varv behövs det då i lindningen för att ge en spänning på 3 V om varje magnet har tvärsnittsytan 2.0 cm<sup>2</sup> och ger  $B = 0.40 \text{ T}$ ? (Du behöver inte ta hänsyn till inverkan av några luftspalter e.d., även om den riktige konstruktören nog måste det)

## Tröghetsnavigering – IMT 2002-03-05 uppgift 2

**Tema:** Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Vid så kallad tröghetsnavigering mäter man ut en kurs (=färdriktning) som båten ska ha och ställer sedan in denna med ett gyro som alltså inte vrider sig i förhållande till jorden. Kopplat till detta gyro finns en kort spole (som alltså är fixt i förhållande till gyrot/jorden) Runt denna spole finns en annan kort spole som är fix i förhållande till båten. Man mäter sedan ömsesidiga induktansen mellan dem. Hur stor vridning motsvarar en ändring av  $M$  med  $1/10000$  om vinkeln mellan spolarnas axlar från början är  $45^\circ$  resp om den är  $0^\circ$ ?

## Magnetbromsar – IMT 2003-01-13 uppgift 2

**Tema:** Vinterkyla

Bussarna har svårigheter med slirning när det blir kallt (Vem har inte det?). Därför uppmanas förarna att använda de magnetbromsar som finns på en del bussar. Dessa anses vara helt låsningsfria eftersom de bygger på att en spole som är fast förbunden med hjulaxeln får rotera i ett magnetfält. Ur spolen fås då en ström som används för att skapa magnetfältet.

Vill man sluta bromsa stänger man av strömmen som tas ut ur spolen.

Förklara varför dessa bromsar är låsningsfria.

## 2 Extrauppgifter

### Strömpuls – MTI 2009-05-20 uppgift A2

**Tema:** Lego Mindstorms

För att känna av hur bitar roterat i förhållande till varandra används ömsesidig induktion mellan korta spolar. Antag att strömmen i en spole (nr 1) kan skrivas

$$I = I_0 e^{-t^2/t_0^2}, \quad t_0 = 2.6 \text{ ms}, \quad I_0 = 110 \text{ mA}.$$

Skissa i en plot spänningen över den andra spolen som funktion av tiden om spole 2 har dubbelt så många varv som spole 1. Ömsesidiga induktansen är 300 mH. För full poäng ska axlarna vara graderade.

### Induktion 2 – MTI 2009-05-20 uppgift B1

**Tema:** Lego Mindstorms

Samma uppställning som A2 (Induktion), men uppgiften är att beräkna och plotta strömmen i spole 2 om uppställningen har spole 2 kopplad i serie med en spole med en självinduktans på 200 mH. Kretsen är alltså sluten.

### Vridning – ILMP 2005-05-11 uppgift 1

**Tema:** Industriell positionering

När man vill kontrollera vridningen av ett objekt används ofta s k induktiva givare som mäter hur spänningen i en spole påverkas av vridningen

i förhållande till ett yttre magnetfält. Det yttre magnetfältet är homogent, varierar sinusformigt i tiden med 500 Hz och är maximalt 0.12 T. Hur stort blir spänningens maxvärde i givaren (=spolen) om denna består av en spole med 100 varv fördelade på några millimeter. Spolens diameter är 9.6 mm.

Ingen järnkärna.

### Ekorrhjul – TMI 2008-03-10 uppgift A1

**Tema:** Visioner på utställningar

På tekniska museet finns ett "ekorrhjul" för småbarn med "navdynamo" dvs genom luftgapet till en toroidspole passerar magneter med omväxlande polaritet (riktning). Strömmen från denna används för att driva fram ett tåg. Med vilken faktor ökar effekten som levereras till tåget om barnen springer dubbelt så fort? (Icke-lineariteter i tågmotorn kan du bortse från)

(Enbart rätt svar ger inga poäng, det är motiveringen som avgör)

### Spole runt solen – FCL 2013-05-28 uppgift B2

**Tema:** Solen och solsken

Vilken ömsesidig induktans får man mellan en "kort" spole på jorden som har självinduktansen 0,12 H och en strömslinga (ett varv) på solen som har diameter 100 Mm (Megameter). Solen ligger på avståndet 0,25 Em (1 Exameter = 1000 Petameter = 1000000 Terameter) Spolen på jorden har diameter 1m och har 100 varv.

Ingen rimlighetsbedömning av svaret erfordras.

## 3 Lösningar

### Induktion – FCL 2009-06-04 uppgift A3

**Lösning:** Givet:  $B = B_0 \sin(2\pi ft + \phi)$ ,  $B_0 = 0.17$  T,  $f = 200$  Hz och  $A = (5 \text{ cm})^2$ .

Sökt:  $U_{\max}$ .

Det magnetiska flödet genom kretsen är

$$\Phi = AB = AB_0 \sin(2\pi ft + \phi),$$

vilket ger en inducerad spänning

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = AB_0 2\pi f \cos(2\pi ft + \phi).$$

Maxspänningen blir alltså

$$U_{\max} = AB_0 2\pi f = 0.53 \text{ V}.$$



### Magnetpuls – MTI 2001-06-07 uppgift 1

**Facit:** Man kan ju alltid börja med att kolla tidskonstanten för spolen/kretsen.

Den har en resistans och induktans som ges av

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho N 2\pi r}{A}, \quad L = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{2r} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r}{2}$$

$$\Rightarrow \text{tidskonstant} = \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 N A}{4\rho} = 7.5 \text{ ms}$$

Om pulsen ska ha en stigtid på enstaka mikrosekunder är nog detta för långt

Anm: Vi har beräknat L med formeln för kort spole vilket åtminstone ger en bra uppskattning. Eftersom tidskonstanten ligger en faktor 1000 från vad som behövs är saken tämligen klar.

### Cykellyse – MTI 1999-06-02 uppgift 1

**Facit:** Den tid det tar för oke att ”byta magnet” är  $1/75 \text{ s} = 13.3 \text{ ms}$ . På denna tid ändras flödet från  $+0.40 \text{ T} \times 0.00020 \text{ m}^2$  till motsvarande negativt värde.

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2 \cdot 0.40 \text{ T} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 / 0.0133 \text{ s} = 0.0120 \text{ Tm}^2/\text{s}$$

Om spänningen ska vara 3 V får vi då antalet varv ur

$$V = N \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow N = 3/0.012 = 250$$

### Tröghetsnavigering – IMT 2002-03-05 uppgift 2

**Lösning:**

Den ömsesidiga induktansen mellan spolarna beror av vinkeln mellan dem enligt

$$M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{N_1 A_1 B_1 \cos \theta}{I_2} = M_0 \cos \theta,$$

där  $M_0$  är ömsesidiga induktansen när vinkeln är 0.

Vi ska ta reda på vilken vinkeländring som ger en ändring av  $M$  med  $1/10000$ . Vid  $45^\circ$  får vi vinkelskillnaden  $\Delta\theta_{45}$  enligt

$$M_{45} = M_0 \cos 45^\circ$$

$$M_{45+} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right) M_0 \cos 45^\circ = M_0 \cos(45^\circ + \Delta\theta_{45})$$

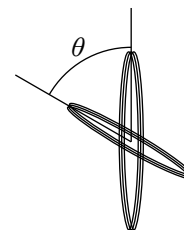
$$\Rightarrow \Delta\theta_{45} = -45^\circ + \cos^{-1}(1.0001 \cos 45^\circ) = 0.1 \text{ mrad} = 0.006^\circ.$$

Vid  $0^\circ$  kan vi göra nästan lika dant

$$M_0 = M_0 \cos 0^\circ$$

$$M_{0+} = \left(1 + \frac{1}{10000}\right) M_0 = M_0 \cos(0^\circ + \Delta\theta_0)$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_0 = \cos^{-1}(0.9999) = 14 \text{ mrad} = 0.81^\circ.$$



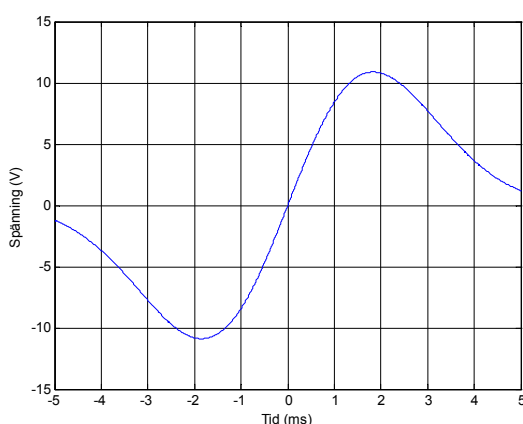
**Magnetbromsar – IMT 2003-01-13 uppgift 2**

**Lösning:** När hjulen låser sig slutar spolen att snurra. Då induceras ingen ström och bromsverkan försvinner.

**Strömpuls – MTI 2009-05-20 uppgift A2**

**Facit:** Spänningen ges av

$$U_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} = M_{21} I_0 \frac{2t}{t_0^2} e^{-t^2/t_0^2}$$

**Induktion 2 – MTI 2009-05-20 uppgift B1**

**Facit:** I den krets som utgörs av spole 2 och den ytterligare spolen ska summan av spänningarna bli 0.

$$0 = U_2 + L_3 \frac{dI_3}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_3 \frac{dI_3}{dt} \Rightarrow I_3 = \frac{M_{21}}{L_3} I_1 + \text{konst} = 1.5 I_1,$$

där konst måste vara noll.

**Vridning – ILMP 2005-05-11 uppgift 1**

**Facit:**

$$U = N \frac{d\Phi}{dt} = N \frac{d}{dt} (B_{\max} \sin(2\pi ft) S) = N B_{\max} 2\pi f S \cos(2\pi ft)$$

Varur följer att

$$U_{\max} = 2\pi f B_{\max} N S = 2.7 \text{ V}$$

**Ekorrhjul – TMI 2008-03-10 uppgift A1**

**Facit:**  $U = N \frac{d\Phi}{dt} = N B S \omega \sin(\omega t)$ , dvs spänningen är prop. mot varvtalet. Effekten = ström ggr spänning = spänning i kvadrat / impedans, dvs effekten fyrdubblas.

**Spole runt solen – FCL 2013-05-28 uppgift B2**

**Lösning:** Den ömsesidiga induktansen ges av  $M = N_1\Phi_1/I_2$ . Låt spole 1 vara solens strömslinga, och 2 spolen på jorden. Vi antar då en ström  $I_2$ , och ser vilket flöde  $\Phi_1$  genom solens strömslinga det ger upphov till. Fältet (längs symmetriaxeln) från kort spole ges av

$$B = \frac{N\mu_0 I r^2}{2(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

där  $r$  är spolens radie och  $z$  är avståndet längs spolens axel till där vi vill beräkna fältet.

Vi antar också att spolarnas normaler är riktade mot varandra. Fältet vid solen, från spolen på jorden, är då ( $z \gg r$ )

$$B_{\text{sol}} = \frac{N_2\mu_0 I_2 r^2}{2z^3}$$

vilket ger att flödet genom solslingan är

$$\Phi_1 = B_{\text{sol}} A_{\text{sol}} = \frac{N_2\mu_0 I_2 r^2}{2z^3} \frac{\pi D^2}{4}.$$

Ömsesidiga induktansen blir

$$M = N_1 \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{N_2\mu_0 r^2}{2z^3} \frac{\pi D^2}{4}$$

vilket med insatta värden ( $N_2 = 100$ ,  $r = 0,5$  m,  $z = 0,25$  Em,  $D = 100$  Mm) ger  $M = 7,9 \cdot 10^{-42}$  H.

# Kretsteori (kap. 26+31)

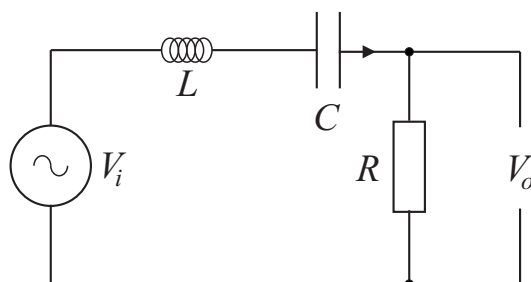
## 1 Övningsuppgifter

### Frekvensfilter – OPEN 2018-01-12 uppgift 4

I varje mottagare av radiosignaler (t.ex. i en mobiltelefon) sitter det ett filter som väljer ut den frekvens man är intresserad av att ta emot. I en mobiltelefon sköter telefonen själv frekvensvalet medan man i en transistorradio vanligtvis scannar genom frekvenserna för att hitta den kanal man vill lyssna på. Ett sådant filter kan t.ex. göras i form av ett RCL-filter, som i figuren nedan. Från olika radio- och mobilmaster skickas elektromagnetiska fält ut. I radions antenn genererar dessa en spänning  $V_i$  som innehåller många olika frekvenser. Om kapacitansen  $C$  är konstant kan man genom att ändra induktansen  $L$  välja ut vilken frekvens som ger en maximal spänning över resistansen  $R$ . Denna spänning är betecknad  $V_o$  i figuren.

a) Ge uttrycket för amplituden av spänningen  $V_o$  som funktion av spänningen  $V_i$  med vinkelfrekvensen  $\omega$ , kapacitansen  $C$  och induktansen  $L$ . (6 p)

b) Förklara i ord varför spänningen  $V_o$  blir mycket mindre än sitt maximala värde om frekvensen är lägre än resonansfrekvensen, samt varför  $V_o$  likaledes blir mycket mindre om frekvensen är högre än resonansfrekvensen. (4 p)



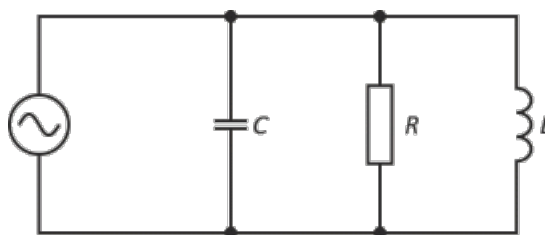
### LRC-krets – OPEN 2018-02-28 uppgift 1

En parallell LRC-krets (se figur) med kapacitans  $C = 160 \mu\text{F}$ , resistans  $R = 1 \text{ k}\Omega$  och induktans  $L = 142 \text{ mH}$  drivs av en spänningskälla med RMS-värde  $V_0 = 230 \text{ V}$  som resulterar i en växelström med frekvens  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**a)** Beräkna impedansen  $Z$  i den parallellkopplade LRC-kretsen. (Ledning: för en parallell LRC-krets kan man ställa upp ett liknande fasorsamband för strömmen som man gör för spänningen i en seriellt kopplad LRC-krets, vilket leder till att strömmens RMS-värde  $I_0 = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$ .) (6 p)

**b)** Om man kunde variera frekvensen på spänningskällan, vid vilken frekvens  $f_c$  skulle strömmen minimeras? (Ledning: strömmen minimeras då LRC-kretsen är resonant.) (2 p)

**c)** Om kretsen hade haft komponenterna kopplade i serie istället för parallellkopplade, hade strömmen vid  $f = f_c$  ändrat sig?. Motivera! Enbart svaren "ja" eller "nej" ger inga poäng. (2 p)



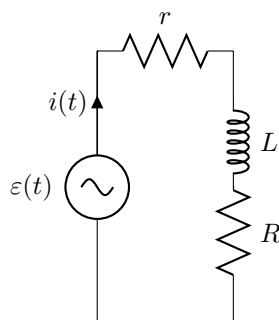
## Induktionshäll – OPEN 2020-04-15 uppgift 2

I en induktionshäll sker energiöverföringen från spis till kastrull genom tidsberoende magnetiska flöden som skapar virvelströmmar i kastrullen. Man kan modellera värmeöverföringen som en resistans  $R$  i serie med induktorn  $L$  som ger upphov till magnetfälten. Effekten som utvecklas i  $R$  motsvarar uppvärmningen av kastrullen, medan effekten som utvecklas i den inre resistansen  $r$  motsvarar Ohmska förluster i spisen (t.ex. p.g.a. resistans i ledarna). Antag att  $r = 20 \Omega$  och kretsen är kopplad till en växelspänningskälla med spänningen  $\varepsilon(t) = V_0 \cos(\omega t)$ , där  $V_0 = 325 \text{ V}$  och  $\omega = 314 \text{ rad/s}$ .

**a)** Vid vilket värde på  $R$  maximeras medeleffekten  $P_R$  som bidrar till uppvärmning av kastrullen? Vad är det maximala värdet på  $P_R$ ? Bortse i detta fall från induktansens inflytande, d.v.s. sätt  $L = 0$ . (3 p)

**b)** Ta nu hänsyn till att induktorn har en induktans  $L = 2 \text{ H}$ . Hur påverkar induktansen svaren i **a)**? Beräkna det nya maximala värdet på  $P_R$  och det värde på  $R$  då  $P_R$  maximeras. (4 p)

**c)** Föreslå en modifikation av kretsen, utan att ändra eller ta bort någon av de givna komponenterna eller parametrarna ( $L$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $V_0$ ,  $\omega$ ) i **b)**, som kan öka  $P_R$ . Motivera ditt val! (3 p)



### Batteriladdning – OPEN 2019-10-25 uppgift 2

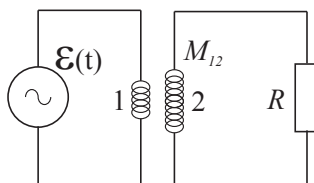
Två parallellkopplade batterier bildar en sluten krets med ett motstånd med resistans  $R_1$ . Batteri  $A$  har en elektromotorisk kraft  $\varepsilon_A = 10 \text{ V}$  och en inre resistans  $r_A = 3 \Omega$ , medan batteri  $B$  har en elektromotorisk kraft  $\varepsilon_B = 5 \text{ V}$  och en inre resistans  $r_B = 10 \Omega$ .

- Rita ett kopplingsschema av kretsen så att det är möjligt att ladda batteri  $B$  m.h.a. batteri  $A$ . Batterierna måste vara parallellkopplade. (1 p)
- Vid vilka värden på  $R_1$  kommer batteri  $B$  att laddas upp av batteri  $A$ ? (2 p)
- Batteri  $B$  byts ut mot en kondensator med kapacitans  $C_2 = 10 \mu\text{F}$ . Skissa hur strömmen till kondensatorn ändras med tiden, givet att kondensatorn är helt urladdad vid  $t = 0$ . Anta att motståndets resistans nu är  $R_1 = 5 \Omega$ . Var noga med att skriva ut enheter och gradera axlarna i grafen, så att värdet på strömmen vid  $t = 0$  och då  $t \rightarrow \infty$  tydligt framgår. Vid vilken tidpunkt kommer strömmen till kondensatorn att vara  $1,23 \text{ A}$ ? (2 p)

### Kretsinduktion – OPEN 2019-01-11 uppgift 3

Du har en spole 1 som kopplar via magnetfältet till en annan spole 2 som i sin tur är förbunden med en resistans  $R$  i serie. Den ömsesidiga induktansen mellan spolarna är  $M_{12}$ . Antag att du driver den första spolen med en växelspanningskälla med spänningen  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , där  $\omega$  är växelspanningens vinkelfrekvens och  $\mathcal{E}_0$  dess amplitud.

- Beräkna hur stor effekt spanningskällan matar in i kretsen med spole 1 som funktion av tiden. Ange svaret endast i givna parametrar. (4 p)
- Beräkna hur stor effekt som utvecklas i resistansen som funktion av tiden. Ange svaret endast i givna parametrar. (3 p)
- Vad blir förhållandet mellan amplituderna (toppvärdena) av strömmarna i krets 2 och 1? (3 p)



## 2 Extrauppgifter

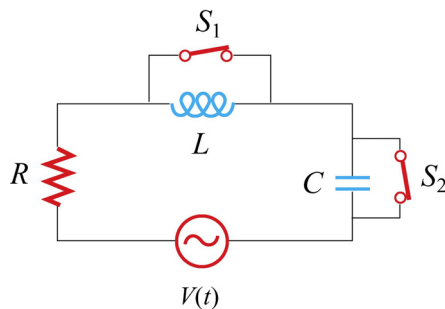
### Strömbrytare – OPEN 2018-04-04 uppgift 4

En LRC-krets med två strömbrytare  $S_1$  och  $S_2$  (se figur), kapacitans  $C = 60 \mu\text{F}$ , resistans  $R = 100 \Omega$  och induktans  $L = 250 \text{ mH}$  drivs av en växelspänningskälla med RMS-värdet på spänningen  $V_0 = 230 \text{ V}$  och med frekvensen  $f = 50 \text{ Hz}$ .

a) Beräkna impedansens belopp  $|Z|$  och spänningens fasförskjutning  $\phi$  gentemot strömmen då: i)  $S_1$  och  $S_2$  är tillslagna; ii)  $S_1$  är tillslagen och  $S_2$  är frånslagen; iii)  $S_1$  och  $S_2$  är frånslagna. Du kan bortse från tidsberoende förändringar precis då strömbrytarna slås till/från och endast beräkna de asymptotiska värdena långt efter att strömbrytarna har slagits till/från. (6 p)

b) Då  $S_1$  och  $S_2$  är frånslagna, vad är det maximala spänningsfallet över varje komponent ( $R$ ,  $L$  och  $C$ )? (2 p)

c) Om man kunde variera frekvens på spänningskällan, vid vilken frekvens skulle impedansen (och således strömmen) vara identisk oavsett om båda strömbrytarna  $S_1$  och  $S_2$  är frånslagna eller tillslagna? (2 p)



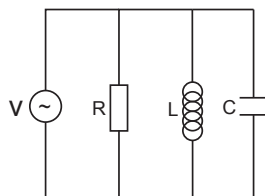
### RLC-krets – OPEN 2019-01-11 uppgift 2

Figuren visar en parallellkopplad RLC-krets.

a) Använd Kirchhoffs lagar samt fasormetoden för att ange beloppet på kretsens impedans som funktion av vinkelfrekvensen  $\omega$ , d.v.s.  $|Z(\omega)|$ . Ange svaret endast i givna parametrar. Notera att lösningsgången är det väsentliga i denna uppgift. Endast ett svar, även ifall det skulle vara korrekt, ger inga poäng. (7 p)

b) Skissa hur impedansen varierar med frekvensen. (1 p)

c) Förklara i ord resultatet i a), d.v.s. varför impedansens belopp beter sig som det gör vid frekvenser mycket mindre än resonansfrekvensen, vid resonansfrekvensen, och för frekvenser mycket större än resonansfrekvensen. (2 p)

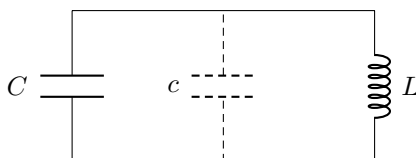


### LC-krets – OPEN 2019-04-15 uppgift 4

Du har en LC-krets och finner genom mätning att dess resonansfrekvens är 4,11 kHz. Du vill veta vilka komponentvärden kondensatorn och induktansen har. Därför ansluter du en 100  $\mu\text{F}$ -kondensator parallellt med den som redan sitter i kretsen (se figur). Du finner nu genom mätning att resonansfrekvensen sjunkit till 3,18 kHz.

a) Hur stor kapacitans och hur stor induktans hade 4,11 kHz-kretsen? (7 p)

b) Vilken blir resonansfrekvensen om du istället ansluter kondensatorn i serie med den ursprungliga kondensatorn i kretsen? (3 p)



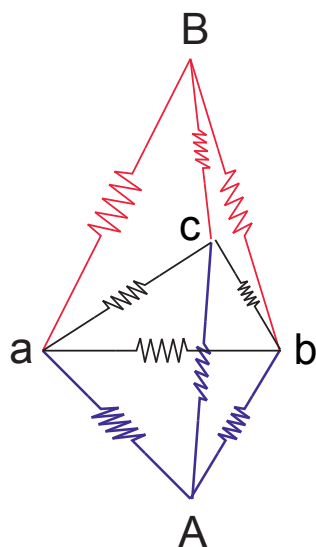
### Resistanspolyeder – OPEN 2019-05-29 uppgift 2

a) Nio identiska resistorer, vardera med resistansen  $R$  kopplas ihop som figuren visar, d.v.s. som en nedåtvänd och en uppåtvänd tetraeder. Vad blir resistansen mellan punkterna A och B? (Ledning: den elektriska potentialen är p.g.a. problemets symmetri samma i punkterna a, b och c.) (5 p)

b) Anta att man byter ut de tre övre resistorerna (de som är direkt anslutna till B) till resistorer om  $3R$ . Anta vidare att punkten A kopplas till en elektrisk potential som är 1 V över jordpotentialen (som definitionsmässigt är noll) och att punkten B ansluts till potentialen  $V_B$  volt. Vad blir den elektriska potentialen i punkten a? (3 p)

c) Med en krets som i b), vilken total ström krävs mellan A och B för att potentialen i B ska bli 12 V, givet att potentialen i A är 1 V och att  $R = 160 \Omega$ ? (2 p)

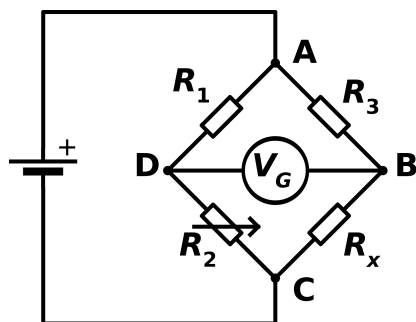




**Spänningsbrygga 1 – OPEN 2021-01-15 uppgift A3**

I en spänningsbrygga (s.k. “Wheatstone bridge”) är fyra motstånd sammankopplade enligt figuren till höger. Det första och tredje motståndet har känd resistans på  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$  respektive  $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ . Det andra motståndet har en varierbar resistans  $R_2$ . Det fjärde motståndet har en okänd resistans  $R_x$ . I mitten av bryggan sitter en galvanometer som mäter spänningen  $V_G$  mellan nod D och nod B.

- a) Det andra motståndet ställs in så att galvanometern mäter en spänning  $V_G = 0 \text{ V}$ , vilket motsvarar  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ . Beräkna det fjärde motståndets resistans  $R_x$ . (0,5 p)
- b) Om likspänningskällan skapar en spänning mellan nod A och nod C som är  $3 \text{ V}$ , vilken elektrisk effekt utvecklas i det fjärde motståndet? (0,5 p)



## Spänningsbrygga 2 – OPEN 2021-01-15 uppgift B6

Spänningsbryggan i uppgift 3 kan användas som en temperatursensor (termistor) genom att mäta spänningen  $V_G$  som funktion av resistansen  $R_x$  för en given elektromotorisk kraft  $\varepsilon$  från likspänningskällan.  $V_G$  har den elektriska potentialen i nod B som referenspunkt, d.v.s.  $V_G = V_D - V_B$ . Den interna resistansen för likspänningskällan är försumbar, så att  $\varepsilon$  motsvarar spänningen mellan nod A och nod C.

**a)** Beräkna ett allmänt uttryck för  $R_x$  som gäller även då  $V_G \neq 0$  V. Antag att  $R_1 = R_2 = R_3 \equiv R_b$ . Uttryck svaret endast i  $V_G$ , naturkonstanter och de i problemtexten givna parametrarna. (0,6 p)

**b)** Motståndet  $R_x$  är gjort av ett material vars resistans beror icke-linjärt på temperaturen enligt

$$R_x(T) = R_0 \exp\left(\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right),$$

där  $\beta$  är en materialkonstant och  $R_0$  är resistansen vid en referenstemperatur  $T_0$ . Om  $\varepsilon = 3$  V,  $R_b = 10$  k $\Omega$ ,  $R_0 = 10$  k $\Omega$  vid  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  och  $\beta = 15^\circ\text{C}$ , vilken temperatur motsvarar en spänning  $V_G = 200$  mV? (0,4 p)

## 3 Lösningar

### Frekvensfilter – OPEN 2018-01-12 uppgift 4

**Facit: a)** Generaliseringen av Ohms lag ger att  $|V_i| = |iZ|$ , där  $i$  är strömmen genom kretsen och  $Z$  är dess impedans. Den senare ges av

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

i en RLC seriekrets. Amplituden på spänningen  $V_o$  blir enl Ohms lag  $|V_o| = R|i|$  vilket med ovanstående ekvationer ger

$$|V_o| = R \frac{|V_i|}{|Z|} = |V_i| \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = |V_i| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

**b)** Man ser i uttrycket ovan att om  $\omega = (LC)^{-1/2}$  så blir nämnaren i uttrycket ovan minimal och då blir  $|V_o| = |V_i|$ . I en passiv krets (d.v.s utan förstärkning) kan man inte hoppas på något bättre. När frekvensen är lägre än denna resonansfrekvens kommer kondensatorns laddning alltid att "hinna med" och därmed ha praktiskt taget samma spänning (via sin laddning) som  $V_i$ . Detta betyder att strömmen genom resistansen kommer att bli mycket liten, och därmed blir också  $|V_o|$  mycket liten.

Vid frekvenser högre än resonansfrekvensen kommer induktansen att motsätta sig de snabba ändringarna av dess magnetfält som spänningen, via strömmen,

försöker påtvinga. Därmed kommer strömmen i kretsen även i detta fall bli mycket liten.

I själva verket brukar radiofilter utformas som en RCL parallellresonanskrets. En sådan är dock lite knepig att räkna på om man inte lärt sig den s.k.  $j\omega$ -metoden. Principen är dock densamma, nämligen att för låga frekvenser fungerar en kondensator som ett avbrott i kretsen och en induktans som en kortslutning mellan dess båda ändar. Vid höga frekvenser gäller det omvända.

## LRC-krets – OPEN 2018-02-28 uppgift 1

**Facit:** I en växelströmskrets beskrivs ström och spänning av ett belopp och en fas, vilket brukar representeras av en fasvektor i det komplexa planet (i.e. en fasor). Vi kallar fasorernas belopp (i detta fall karakteriserat av RMS-värdet) över resistorn för  $V_R$  och  $I_R$  och deras projektion på den reella axeln för  $v_R$  och  $i_R$ , vilket motsvarar den momentana spänningen och strömmen över resistorn. I en parallellt kopplad krets är spänningsfallet det samma över alla komponenter så att  $v_R = v_C = v_L = v_0$ , vilket betyder att även  $V_R = V_C = V_L = V_0$ . Detta kan lätt verifieras med hjälp av Kirchoff's spänningslag över de olika slutna ringarna som strömmen kan ta. Om istället Kirchoff's strömlag appliceras i en nod fås att  $i_R + i_C + i_L = i_0$ . Färförhållandet mellan strömmarna fås genom att rita upp ett fasordiagram (likt de på s. 1052 i kap. 31.3 i University Physics för spänningen i en seriekopplad LRC-krets) som leder till att

$$I_0 = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}. \quad (20)$$

a) Vi använder oss av den komplexa generaliseringen av Ohms lag leder till att  $V_0 = I_0 Z$ , där  $Z$  är impedansen i LRC-kretsen. Strömmen genom resistorn, kondensatorn och induktorn blir således  $I_R = V_0/R$ ,  $I_C = V_0/X_C$ , där  $X_C = 1/(2\pi fC)$  är kondensatorns kapacitiva reaktans, respektive  $I_L = V_0/X_L$ , där  $X_L = 2\pi fL$  är spolens induktiva reaktans. Vi sätter in uttrycken för delströmmarna i ekv (20) och får att

$$I_0 = \sqrt{\frac{V_0^2}{R^2} + \left(\frac{V_0}{X_L} - \frac{V_0}{X_C}\right)^2} = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = \frac{V_0}{Z}. \quad (21)$$

Således är impedansen i LRC-kretsen

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}. \quad (22)$$

Vi räknar ut den kapacitiva reaktansen  $X_C = 1/(2\pi fC) = 19,9 \Omega$  och den induktiva reaktansen  $X_L = 2\pi fL = 44,6 \Omega$  och sätter in dem i ekv. (22) tillsammans med  $R = 1000 \Omega$  för att erhålla det slutliga svaret  $Z = 35,9 \Omega$ .

b) Strömmen genom en parallell LRC-krets är minimal då kretsen är i resonans, vilket sker då  $X_L = X_C$  och impedansen är helt resistiv. Detta leder efter förkortning till att resonansfrekvensen  $f_c$  fås då

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (23)$$

Med  $L = 142 \text{ mH}$  och  $C = 160 \text{ }\mu\text{F}$  fås att strömmen minimeras vid  $f_c = 33,4 \text{ Hz}$ .

c) Vid resonansfrekvensen  $f_c$  är  $X_L = X_C$  och impedansen är helt resistiv, d.v.s.  $Z = R$ . Detta gäller även för en seriekopplad LRC-krets där impedansen beskrivs av ekv. (31.23) i University Physics och båda kretsarna kommer således ha samma resonansfrekvens  $f_c$  och samma impedans  $Z$ . Detta gör att strömmen kommer att vara den samma i båda kretsarna vid  $f_c$  trots att i seriekopplade kretsen är det ett maximum ( $I_0$  minskar då  $f$  ökar eller minskar) och i parallellkopplade är det ett minimum ( $I_0$  ökar då  $f$  ökar eller minskar).

## Induktionshäll – OPEN 2020-04-15 uppgift 2

**Facit:** Medeleffekten som utvecklas i en komponent i en växelströmskrets ges av  $P = VI \cos(\phi)/2$ , där  $V$  är spänningens amplitud över komponenten,  $I$  är strömmens amplitud över komponenten och  $\phi$  är komponentens fasskift mellan ström och spänning. Tillämpat på motståndet  $R$  tillsammans med Ohms lag generaliserad till växelström får vi att  $\phi_R = 0$ ,  $I_R = V_0/|Z|$  och  $V_R = I_R R = V_0 R/|Z|$  så att

$$P_R = \frac{V_0^2 R}{2|Z|^2},$$

där  $Z$  är kretsens impedans. För en seriekopplad LRC-krets ges impedansen av  $|Z| = \sqrt{R_{\text{tot}}^2 + (wL - 1/(wC))^2}$ . I vår krets är  $R_{\text{tot}} = r + R$  och  $X_C = 1/(wC) = 0$ . Maximal effekt  $P_R$  kan erhållas grafiskt på miniräknare eller genom att derivera  $P_R$  m.a.p.  $R$ , vilket ger

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{V_0^2}{2((r+R)^2 + (wL)^2)} - \frac{V_0^2 R(r+R)}{((r+R)^2 + (wL)^2)^2}.$$

Vid maximal effekt måste  $\frac{dP_R}{dR} = 0$ , vilket ger att  $R = \sqrt{r^2 + (wL)^2}$  och  $P_{R,\text{max}} = V_0^2/(4(r+R))$ .

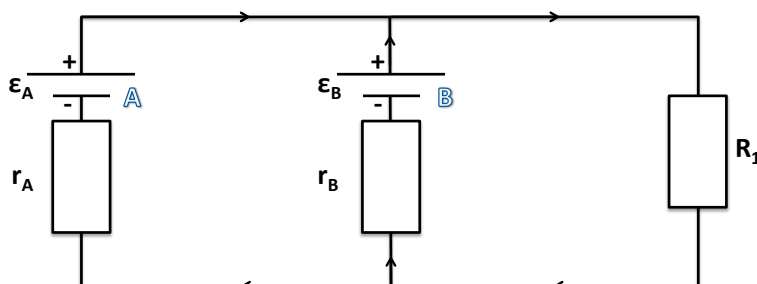
a) Då  $L = 0$  fås maximal effekt då  $R = r = 20 \text{ }\Omega$ , vilket motsvarar  $P_{R,\text{max}} = V_0^2/(8R) = 660 \text{ W}$ .

b) Om  $L = 2 \text{ H}$  fås maximal effekt då  $R = 628 \text{ }\Omega$ , vilket motsvarar  $P_{R,\text{max}} = 40,7 \text{ W}$ . Effekten som utvecklas i  $R$  minskar p.g.a. att impedansen ökar så att strömmen som går genom kretsen minskar.

c) Vi kan minimera impedansen i kretsen genom att seriekoppla en kondensator så att kretsen blir helt resistiv. Detta sker vid resonans, givet av  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , vilket betyder att vi skall seriekoppla en kondensator med kapacitans  $C = 1/(L\omega^2) = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ . Vi får då att den induktiva och kapacitiva reaktansen precis tar ut varandra och  $|Z| = r + R$ , så att strömmen  $I_R$  och medeleffekten som utvecklas i  $R$  är samma som i a).

## Batteriladdning – OPEN 2019-10-25 uppgift 2

**Facit: a)** För att ett batteri skall kunna ladda upp ett annat batteri måste de vara kopplade pluspol mot pluspol eller minuspol mot minuspol, se Ex. 26.3 på s. 879-880 i University Physics. Ett exempel på ett korrekt kopplingsschema ges i figuren nedan. Om batterierna istället är kopplade pluspol mot minuspol är de seriekopplade och den totala spänningen ökar, men det kommer aldrig gå att få en spänning över batteri  $B$  som är motriktad den inneboende elektromotoriska kraften  $\varepsilon_B$ . För två batterier går detta endast att få över batteriet med lägre elektromotorisk kraft, vilket är varför batteri  $A$  inte kan laddas upp av batteri  $B$ .



Kopplingsschema av krets given i problemtexten så att batterierna är parallellkopplade och batteri  $B$  kan laddas upp av batteri  $A$ .

**b)** Vi ställer upp Kirchoffs strömlag i den övre noden med vald strömriktning i figuren ovan och får att

$$I_A + I_B = I_1, \quad (24)$$

där  $I_A$  är strömmen genom batteri  $A$ ,  $I_B$  är strömmen genom batteri  $B$  och  $I_1$  är strömmen genom det yttre motståndet. Vi noterar att för att batteri  $B$  skall kunna laddas upp med denna definition av strömriktning måste  $I_B < 0$ . Vi kan kvalitativt förstå att detta endast kan ske vid höga värden på  $R_1$ , eftersom batterierna kortsluts om  $R_1 = 0$  så att endast den inre resistansen begränsar strömmarna till  $I_A = \varepsilon_A/r_A$  och  $I_B = \varepsilon_B/r_B$ , d.v.s.  $I_A$ ,  $I_B$  och  $I_1$  blir alla maximala. Om, å andra sidan,  $R_1 \rightarrow \infty$  kommer ingen ström gå igenom det yttre motståndet och  $I_A = -I_B$ , d.v.s.  $I_B < 0$  ty  $\varepsilon_A - \varepsilon_B > 0$ . Det måste således finnas ett visst värde på  $R_1$  där  $I_B = 0$  för att strömmen skall byta tecken mellan de två ytterligheterna. Vi finner denna brytpunkt genom att tillämpa Kirchoffs spänningslag på två slutna slingor i kretsen som tillsammans innefattar alla komponenterna. Positiva potentialskillnader längs slingan räknar vi som ett positivt spänningsbidrag och negativa potentialskillnader längs slingan räknar vi som negativa spänningsfall. Går vi igenom den vänstra slingan medurs med startpunkt vid den övre noden får vi

$$-\varepsilon_B + I_B r_B - I_A r_A + \varepsilon_A = 0. \quad (25)$$

Går vi istället igenom den högra slingan medurs med samma startpunkt får vi

$$-I_1 R_1 - I_B r_B + \varepsilon_B = 0. \quad (26)$$

Vi löser ut  $I_B$  ur ekv. (26) och ersätter  $I_1$  med vänsterledet i ekv. (24) för att få

$$I_B = \frac{\varepsilon_B - R_1(I_A + I_B)}{r_B}. \quad (27)$$

Vi löser nu ut  $I_A$  ur ekv. (25) och sätter in i uttrycket i ekv. (27) för att få

$$I_B = \frac{\varepsilon_B}{r_B} - \frac{R_1(\varepsilon_A - \varepsilon_B + I_B(r_B + r_A))}{r_A r_B}. \quad (28)$$

Genom att lösa ut  $I_B$  ur ekv. (28) och förkorta uttrycket får vi slutligen att

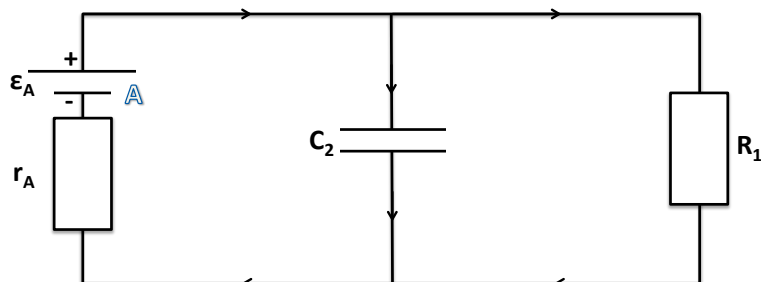
$$I_B = \frac{\varepsilon_B r_A - R_1(\varepsilon_A - \varepsilon_B)}{R_1(r_B + r_A)}. \quad (29)$$

Vi ser att  $I_B = 0$  då nämnaren är noll, d.v.s.  $R_1 = r_A \varepsilon_B / (\varepsilon_A - \varepsilon_B) = 3 \Omega$ . Svaret blir således att batteri  $B$  kommer att laddas upp av batteri  $A$  då  $R_1 > 3 \Omega$ .

c) När batteri  $B$  byts ut mot en kondensator ser kretsen ut enligt figuren nedan. Eftersom kondensatorn är helt urladdad vid  $t = 0$  då kretsen kopplas in så antar vi nu att strömmen går åt samma håll som när batteri  $B$  laddades upp. Vi tillämpar Kirchoffs strömlag och får att

$$I_A = I_1 + I_2, \quad (30)$$

där  $I_2$  är den sökta strömmen till kondensatorn.



Kopplingschema av krets given i problemtexten så att batteri  $B$  ersätts av en kondensator med kapacitans  $C_2$ .

Givet att potentialskillnaden över kondensatorn är  $q/C_2$ , där  $q$  är nettoladdningen på kondensatorns positivt laddade platta och  $C_2$  är dess kapacitans, så tillämpar vi Kirchoffs spänningslag när vi går igenom den vänstra slingan medurs från den övre noden och får

$$-\frac{q}{C_2} - I_A r_A + \varepsilon_A = 0. \quad (31)$$

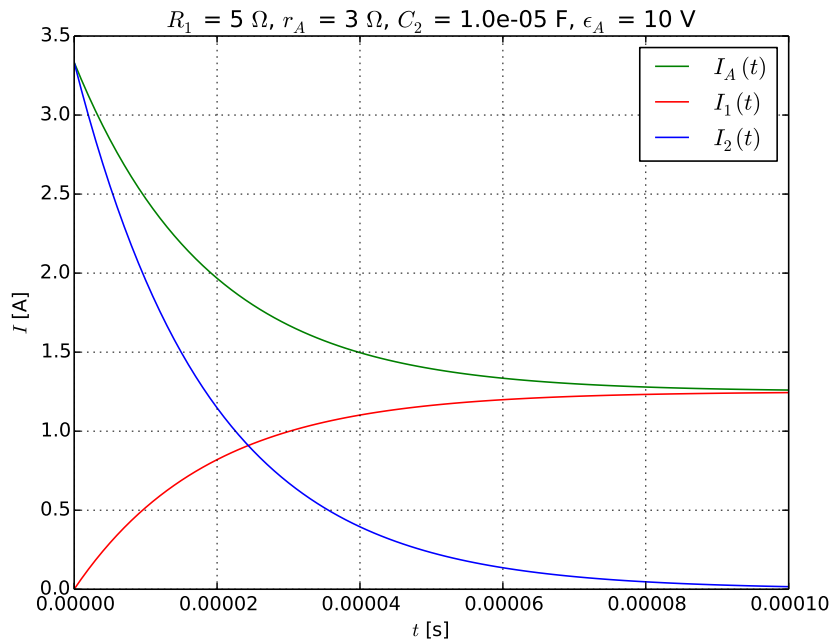
Vi kan nu kvalitativt utvärdera beteendet i kretsen. Vid  $t = 0$  är kondensatorn helt urladdad, d.v.s.  $q = 0$  och spänningsfallet är noll över kondensatorn. Detta gör att batteri  $A$  åter igen kortsluts och all ström kommer att gå över kondensatorn så att  $I_2 = I_A = \varepsilon_A / r_A = 10/3$  A. Då  $t \rightarrow \infty$  kommer kondensatorn vara helt uppladdad och spänningsfallet över kondensatorn kommer exakt motsvara spänningen över batteriet (inklusive dess inre resistans). Detta gör att all ström kommer att gå genom det yttre motståndet så att

$I_1 = I_A = \varepsilon_A / (r_A + R_1) = 10/8$  A och  $I_2 = 0$  A. Vi kommer alltså få en avtagande ström  $I_2$  med tiden, vilket stämmer överens med ekv. (26.13) på s. 888 i University Physics där strömmen för en seriekopplad RC-krets är

$$I_2(t) = I_0 \exp^{-t/(RC)}, \quad (32)$$

där  $I_0$  är strömmen vid  $t = 0$ ,  $R$ ,  $C$  respektive  $\tau = RC$  är kretsens ekvivalenta resistans, ekvivalenta kapacitans och tidskonstant. Vi identifierar  $I_0 = \varepsilon_A / r_A = 10/3$  A och  $C = C_2 = 10 \mu\text{F}$ , men frågan är vad  $R$  kommer att motsvara när det yttre motståndet och batteriets inre resistans inte kan förenklas till en ekvivalent resistans. Det visar sig att  $R = r_A R_1 / (r_A + R_1) = 1,875 \Omega$ , vilket är identiskt med det uttryck vi skulle få om de två motstånden var parallellkopplade med varandra men seriekopplade med kondensatorn. Notera att detta inte är fallet för  $I_0$  som endast begränsas av den inre resistansen  $r_A$ , och inte  $R_1$ . För en komplett härledning av detta se slutet av detta lösningsförslag, men låt oss först plotta  $I_2$  som funktion av  $t$  i figuren nedan. Vi ser att  $I_2$  (blå linje) avtar exponentiellt som ekv. (32) förutspår och att strömmen till kondensatorn kommer att vara 1,23 A efter ungefär  $20 \mu\text{s}$ , vilket vi kan bekräfta genom att sätta in  $I_2 = 1,23$  A i i ekv. (32) och lösa ut  $t$  för att få

$$t = -\ln\left(\frac{I_2}{I_0}\right) RC \approx RC = 19 \mu\text{s}. \quad (33)$$



Delströmmarna  $I_1$ ,  $I_2$  och  $I_A$  som funktion av tiden  $t$  i kopplingsschemat från första figuren.

För att härleda  $I_2(t) \equiv \frac{dq}{dt}$  deriverar vi ekv. (31) m.a.p.  $t$  så att

$$I_2 = -C_2 \frac{d(I_A r_A - \varepsilon_A)}{dt} = -C_2 r_A \frac{dI_A}{dt}, \quad (34)$$

eftersom endast  $I_A$  i högerledet ändras med tiden. För att lösa denna differentialekvation vill vi beskriva  $I_A$  som funktion av  $I_2$  för vår blandkrets. Vi tillämpar Kirchoffs spänningslag på den yttre slingan när vi går medurs från den övre noden för att få

$$-I_1 R_1 - I_A r_A + \varepsilon_A = 0. \quad (35)$$

Vi multiplicerar ekv. (30) med  $-R_1$  och adderar till ekv. (35) så vi kan lösa ut  $I_A$  till

$$I_A = \frac{\varepsilon_A + I_2 R_1}{r_A + R_1}. \quad (36)$$

Vi sätter in ekv. (36) i ekv. (31) och kan sedan likt härledningen på s. 888 i University Physics separera variablerna  $I_2$  och  $t$ , integrera båda leden och höja uttrycket till exponenten för att erhålla ett identiskt uttryck med ekv. (32) då  $R = r_A R_1 / (r_A + R_1)$  och integrationskonstanten har identifierats till  $I_0 = \varepsilon_A / r_A$  m.h.a. begynnelsevillkoret vid  $t = 0$ .

### Kretsinduktion – OPEN 2019-01-11 uppgift 3

**Facit: a)** Kirchoffs andra lag applicerad på de två slutna kretsarna, tillsammans med formeln för ömsesidig induktans [ekv. (30.3) i läroboken] ger det kopplade ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 - M_{12} \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ i_2 R - M_{12} \frac{di_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

där  $i_1$  och  $i_2$  är strömmen i de båda kretsarna. Derivering av den senare ekvationen m.a.p. tiden, och insättning i den övre ekvationen ger:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{M_{12}^2}{R} \frac{d^2 i_1}{dt^2}.$$

Detta är en separabel andra ordningens ordinär differentialekvation (ODE). Givet att  $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  fås efter integration två gånger (där integrationskonstanterna identifieras i varje steg)

$$i_1 = -\frac{\mathcal{E}_0 R}{M_{12}^2 \omega^2} \cos(\omega t).$$

Eftersom effekten  $P_1 = \mathcal{E}_1 i_1$  får vi

$$P_1(t) = -\frac{\mathcal{E}_0^2 R}{M_{12}^2 \omega^2} \cos^2(\omega t).$$

Eftersom  $M_{12}$  har enheten  $\text{VsA}^{-1}$  finner vi att svaret har rätt enhet.

**b)** Vi använder sambandet  $\mathcal{E}_2 = M_{12} di_1/dt$  samt uttrycket i **a)** för  $i_1$  och får då

$$\mathcal{E}_2(t) = \frac{M_{12}(\omega \mathcal{E}_0 R \sin(\omega t))}{M_{12}^2 \omega^2} = \frac{\mathcal{E}_0 R \sin(\omega t)}{M_{12} \omega}.$$



Sedan kan vi använda Ohms lag för att få  $i_2 = \mathcal{E}_2/R$ , samt sambandet  $P_2 = \mathcal{E}_2 i_2$  för att slutligen få den i resistansen utvecklade effekten

$$P_2(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{M_{12}^2 \omega^2} \sin^2(\omega t).$$

Man ser att tidsmedelvärdet av den inmatade och den utvecklade effekten är lika, men att de ligger 90 grader ur fas. Detta beror på den induktiva kopplingen, där man ska komma ihåg att det oscillerande  $B$ -fält som kopplar de båda kretsarna temporärt lagrar energi. Därför är inte den effekten som matas in lika med den utvecklade effekten vid samma tidpunkt.

c) Strömmen  $i_2$ s amplitud  $\hat{i}_2$  är

$$\hat{i}_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{M_{12}\omega}.$$

Strömmen  $i_1$ s amplitud  $\hat{i}_1$  är

$$\hat{i}_1 = \frac{\mathcal{E}_0 R}{M_{12}^2 \omega^2}.$$

Kvoten blir således

$$\frac{\hat{i}_2}{\hat{i}_1} = \frac{M_{12}\omega}{R}.$$

Vi kontrollerar svarets enhet och finner att svaret saknar enhet såsom det ska vara i en kvot mellan storheter som har samma enhet.

## Strömbrytare – OPEN 2018-04-04 uppgift 4

**Facit:** I en växelströmskrets beskrivs ström och spänning av ett belopp och en fas, vilket brukar representeras av en fasvektor i det komplexa planet, i.e. en fasor. Vi kallar spänningfasorerna (deras längder karakteriserade av RMS-värdena) över resistorn, kondensatorn och induktansen för  $V_R$ ,  $V_C$  respektive  $V_L$ . I en seriellt kopplad krets är strömmen densamma genom alla komponenter så att  $I_R = I_C = I_L = I_0$ . Detta kan lätt verifieras med hjälp av Kirchoff's strömlag i punkter mellan de olika komponenterna. Om istället Kirchoff's spänningslag appliceras fås att  $V_R + V_C + V_L = V_0$ . Fasförhållandet mellan spänningsfallen fås genom att rita upp ett fasdiagram (se fig. 31.13 på s. 1053 i University Physics) där spänningsfallet över resistorn är i fas med strömmen medan  $V_C$  ligger  $90^\circ$  efter och  $V_L$   $90^\circ$  före  $I_0$ . Detta leder till att

$$|V_0| = \sqrt{V_R^2 + (|V_L| - |V_C|)^2}. \quad (38)$$

Den komplexa generaliseringen av Ohms lag leder till att vi kan skriva ett liknande uttryck för impedansens belopp som ges av ekv. (31.21) på s. 1053 i University Physics

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (39)$$

där  $R$  är motståndets resistans, där  $X_L = 2\pi fL$  är spolens induktiva reaktans och  $X_C = 1/(2\pi fC)$  är kondensatorns kapacitiva reaktans. Fasförskjutningen

för  $V_0$  gentemot  $I_0$  fås ur fasordiagrammet m.h.a. enkel trigonometri till ekv. (31.24) på s. 1054 i University Physics

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right). \quad (40)$$

a) Vi beaktar de tre olika fallen:

1.  $S_1$  och  $S_2$  är tillslagna: strömmen kan gå runt både induktansen och kondensatorn utan motstånd och kommer således endast skapa ett spänningsfall genom resistorn så att  $V_R = V_0$  och  $I_0 = V_0/R$ . Vi kan använda ekv. (39) och ekv. (40) med  $X_C = X_L = 0 \Omega$  och får då att  $|Z| = R = 100 \Omega$  och  $\phi = \tan^{-1}(0) = 0^\circ$ .
2.  $S_1$  är tillslagen  $S_2$  är frånslagen: strömmen kan gå runt induktansen utan motstånd, men måste passera kondensatorn med en kapacitiv reaktans  $X_C = 1/(2\pi fC) = 53 \Omega$ . Vi kan använda ekv. (39) och ekv. (40) med  $X_L = 0 \Omega$  och får då att  $|Z| = 113 \Omega$  och  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-X_C}{R} \right) = -28^\circ$ .
3.  $S_1$  och  $S_2$  är frånslagna: strömmen måste passera induktansen med en induktiv reaktans  $X_L = 2\pi fL = 79 \Omega$  och kondensatorn med en kapacitiv reaktans  $X_C = 1/(2\pi fC) = 53 \Omega$ . Vi kan använda ekv. (39) och ekv. (40) och får då att  $|Z| = 103 \Omega$  och  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) = 14^\circ$ .

b) Från den komplexa generaliseringen av Ohms lag får vi att det maximala spänningsfallet över resistorn, kondensatorn och induktansen blir  $V_{R,\max} = I_{0,\max}R$ ,  $V_{C,\max} = I_{0,\max}X_C$ , respektive  $V_{L,\max} = I_{0,\max}X_L$ . Den maximala strömmen  $I_{0,\max} = V_{0,\max}/|Z| = \sqrt{2}|V_0|/|Z| = 3,15 \text{ A}$ , där faktorn  $\sqrt{2}$  kommer från förhållandet mellan maxvärdet och RMS-värdet för AC-spänning/ström. Detta ger att  $V_{R,\max} = 315 \text{ V}$ ,  $V_{C,\max} = 167 \text{ V}$  och  $V_{L,\max} = 248 \text{ V}$  vilka kan sättas in i ekv. (38) för att verifiera svaren.

c) För att impedans (och ström) skall vara identiska då  $S_1$  och  $S_2$  är frånslagna ( $|Z|$  beskrivs av ekv. (39)) eller tillslagna ( $|Z| = R$ ) måste impedansen vara helt resistiv ( $I_0 = V_0/R$  i båda fallen). Detta sker i en LRC-krets vid resonans, d.v.s. då  $X_L = X_C$ , vilket efter förkortning leder till att resonansfrekvensen  $f_c$  ges av ekv. (31.32) på s. 1060 i University Physics

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (41)$$

Med  $L = 250 \text{ mH}$  och  $C = 60 \mu\text{F}$  fås resonansfrekvensen  $f_c = 41 \text{ Hz}$ .

## RLC-krets – OPEN 2019-01-11 uppgift 2

Facit: a) Kirchhoffs lagar ger:

$$\vec{i}_{Tot} = \vec{i}_L + \vec{i}_C + \vec{i}_R,$$

$$|i_L| = |V|/(\omega L),$$

$$|i_C| = |V|\omega C,$$

$$|i_R| = |V|/R.$$

Ritar man upp fasordiagrammet och ger spänningen  $\bar{V}$  (ritad som en fasor eftersom vi har en växelspanningskrets) en godtycklig riktning så kan man i samma diagram rita in  $\bar{i}_R$  som en fasor parallell med  $\bar{V}$ , strömmen  $\bar{i}_L$  som en fasor vriden 90 grader medurs från  $\bar{V}$ , och strömmen  $\bar{i}_C$  som en fasor vriden 90 grader moturs från  $\bar{V}$ . Vi räknar sedan ut beloppet av strömmen  $\bar{i}_{Tot}$  med hjälp av Pythagoras sats:

$$|i_{Tot}| = \sqrt{|i_R|^2 + (|i_C| - |i_L|)^2}.$$

Vidare är per definition

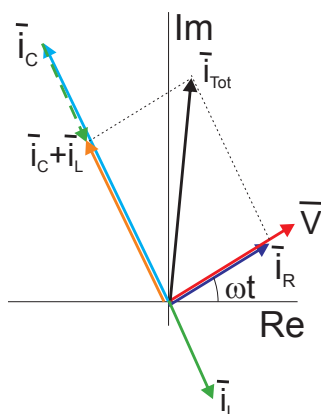
$$|Z| = \frac{|V|}{|i_{Tot}|} = \frac{|V|}{\sqrt{\left(\frac{|V|}{R}\right)^2 + |V|^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

Detta ger

$$|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

**b)** Impedansen når sitt högsta värde,  $R$ , då frekvensen är resonant med den bildade  $LC$ -resonatorn. Resonansfrekvensen ser vi är  $\omega = (LC)^{-1/2}$ . För både högre och lägre värden på frekvensen sjunker impedansen, och blir ungefär  $\omega L$  för små värden på frekvensen och  $1/(\omega C)$  för frekvenser mycket högre än resonansfrekvensen.

**c)** För låga frekvenser verkar spolen som en kortslutning medan kondensatorn verkar som ett avbrott. Impedansen blir låg och den mesta strömmen går genom spolen. Vid höga frekvenser verkar kondensatorn som en kortslutning. Impedansen blir låg och den mesta strömmen går då genom kondensatorn. Vid resonansfrekvensen verkar  $LC$ -delen av kretsen som ett avbrott och "syns" inte från generatoren. Då blir kretsen rent resistiv, med resistansen  $R$ .



**LC-krets – OPEN 2019-04-15 uppgift 4**

**Facit: a)** Vi antar att kapacitansen är  $C$  och induktansen är  $L$ . Resonansvinkelfrekvensen i LC-kretsen ges då av

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

När vi kopplar en kondensator med kapacitansen  $c$  parallellt med den första blir den resulterande kapacitansen  $C + c$ . Den nya resonansvinkelfrekvensen blir

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L(C+c)}}.$$

Kvadrering av de båda ekvationerna, och division av den första med den andra resulterar i ekvationen

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{L(C+c)}{LC} = 1 + \frac{c}{C}.$$

Från denna ekvation får vi

$$C = \frac{c}{\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} - 1} = \frac{c}{\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1}.$$

Med insatta siffror får man  $C = 149 \mu\text{F}$ . Sätts detta in i  $\omega_1^2 = 2\pi f_1 = (LC)^{-1}$  får man resultatet  $L = 10,1 \mu\text{H}$ .

**b)** Kopplas istället kondensatorerna i serie med induktansen så ges den resulterande kretsens kapacitans  $C_T$  av

$$C_T = \frac{c \cdot C}{c + C} = \frac{100 \cdot 149}{100 + 149} = 59,9 \mu\text{F}.$$

Vi sätter in detta i den vanliga formeln för resonansvinkelfrekvensen och får  $\omega_3 = 40,8 \text{ kHz}$ , vilket betyder att resonansfrekvensen blir  $f_3 = 6,49 \text{ kHz}$ .

**Resistanspolyeder – OPEN 2019-05-29 uppgift 2**

**Facit: a)** Problemets symmetri (roterar vi kretsen  $2\pi/3$  kring axeln från A till B så ser den likadan ut som innan rotationen) gör att man kan se att om man påför en spänning mellan punkterna A och B, så kommer de elektriska potentialerna i punkterna a, b och c vara desamma. Därför kommer ingen ström flyta mellan dessa tre punkter. Detta i sin tur betyder att vi utan att störa resistornätverkets strömmar kan ta bort resistorerna mellan ab, bc, och ca. Vi får då ett resistornätverk med tre parallella "grenar" mellan A och B, vardera bestående av två resistorer med resistansen  $R$  vardera. Den totala resistansen  $R_{AB}$  ges då av ekvationen

$$\frac{1}{R_{AB}} = 3 \cdot \frac{1}{2R},$$

d.v.s. att  $R_{AB} = 2R/3$ .

**b)** Även efter bytet av resistorer har problemet samma symmetri. Detta betyder att resistorerna mellan ab, bc, och ca fortfarande kan tas bort utan att någon potential ändras. Var och en av de tre skapade kretsgrenarna ser nu spänningen  $V_B - 1$  [V] som ligger över två resistorer med resistanserna  $R$  och  $3R$ . Spänningsdelning ger att delen  $R/(R + 3R) = 1/4$  av spänningen ligger över resistansen  $R$ , med punkten A som referenspunkt. Eftersom punkten A har potentialen 1 V blir potentialen i punkten a lika med

$$V_a = 1 + \frac{V_B - 1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{V_B}{4} \text{ [V]}.$$

**c)** I var och en av grenarna krävs att den elektriska potentialen ökar med 11 V. I varje gren kommer strömmen att flyta genom en total resistans av  $R + 3R = 4R$ . Strömmen  $i$  som krävs för detta är enligt Ohms lag

$$i = \frac{11}{4R} \text{ [A]},$$

där strömmen anges i Ampere om  $R$ :s värde anges i Ohm. Kretsen har tre "grenar". Den totala strömmen  $i_{AB}$  mellan A och B blir således

$$i_{AB} = 3i = \frac{33}{4R} \approx 0,052 \text{ A}.$$

### Spänningsbrygga 1 – OPEN 2021-01-15 uppgift A3

**Facit: a)** Vi antar att galvanometern är ideal, d.v.s. det kan inte gå någon ström mellan nod D och nod B. Vi har då två seriekopplade motstånd i två parallella spår,  $R_1$  och  $R_2$  (med  $I_1 = I_2$ ) samt  $R_3$  och  $R_x$  (med  $I_3 = I_x$ ), som båda skall uppleva samma totala potentialskillnad  $V_A - V_C$ . För en balanserad spänningsbrygga (då  $V_G = 0$  V) måste förhållandet mellan de två motstånden i serie vara detsamma, d.v.s.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x}.$$

Om man inte vet detta kan det härledas m.h.a. Kirchhoffs spänningslag som ger följande samband efter potentialvandring över trianglarna

$$I_1 R_1 = I_3 R_3, \quad I_1 R_2 = I_3 R_x.$$

Från dessa två samband kan vi lösa ut det okända motståndet till

$$R_x = \frac{I_1 R_2}{I_3} = \frac{R_3 R_2}{R_1} = 10 \text{ k}\Omega.$$

**b)** Effekten som utvecklas i det fjärde motståndet är  $P_x = I_x V_x = I_x^2 R_x$ . Vi söker strömmen  $I_x = I_3$  genom det fjärde motståndet. Vi tillämpar Kirchhoffs spänningslag över den högra grenen i spänningsbryggan och sluter kurvan över likspänningskällan, vilket ger

$$I_x = \frac{\varepsilon}{R_3 + R_x},$$

där  $\varepsilon = V_A - V_C = 3$  V är den elektromotoriska kraften från likspänningskällan som motsvarar spänningen mellan nod A och nod C. Detta ger att  $P_x = \varepsilon^2 R_x / (R_3 + R_x)^2 = 0,4$  mW.

## Spänningsbrygga 2 – OPEN 2021-01-15 uppgift B6

**Facit: a)** Vi utgår från vad vi redan vet om spänningsbryggan från uppgift 3, men låter nu  $V_G = V_D - V_B$  variera och sätter  $R_1 = R_2 = R_3 \equiv R_b$ . Vi använder nod C som referenspotential, så att  $V_C = 0$  och  $V_A = \varepsilon$ . Spänningsdelning ger då att

$$V_G = V_D - V_B = \varepsilon \frac{R_b}{2R_b} - \varepsilon \frac{R_x}{R_b + R_x} = \varepsilon \left( \frac{1}{2} - \frac{R_x}{R_b + R_x} \right).$$

Vi kan från detta samband m.h.a. lite algebra lösa ut  $R_x$  till

$$R_x = R_b \frac{(\varepsilon - 2V_G)}{(\varepsilon + 2V_G)}.$$

Vi noterar att svaret har rätt enhet och endast är uttryckt i  $V_G$  och givna parametrar.

**b)** Vi löser ut  $T$  ur sambandet givet för  $R_x(T)$  och sätter in svaret från deluppgift **a)** för att komma fram till

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{R_x}{R_0} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{T_0} + \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{R_b(\varepsilon - 2V_G)}{R_0(\varepsilon + 2V_G)} \right)}.$$

Med  $\varepsilon = 3$  V,  $R_b = 10$  k $\Omega$ ,  $R_0 = 10$  k $\Omega$ ,  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ,  $\beta = 15^\circ\text{C}$  och  $V_G = 200$  mV, som alla var givna i uppgiften, erhålles svaret  $T = 45^\circ\text{C}$ .

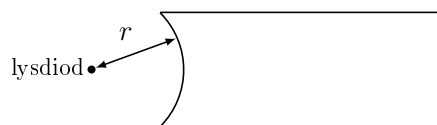
# Geometrisk optik (kap. 33-34)

## 1 Övningsuppgifter

### Ljusledare – IMT 2000-01-11 uppgift 5

**Tema:** Instrumentpaneler till tyngre fordon

I bland använder man små plastdetaljer för att ledan ljus från ljuskälla till det ställe som ska belysas. Hur högt måste brytningsindex vara för att ljuset ska ledas utan förluster i en cylindrisk ljusledare, med diameter 1.8mm som belyses i ena kortändan av en lysdiod som sänder ut halv konvinkel  $20^\circ$ . Ändytan på cylinder är sfäriskt konkav med krökningscentrum i ljuspunkten.



### Ögonmodell – F 2003-03-06 uppgift 4

**Tema:** Kirurghjälpmedel

I en enkel ögonmodell (som är förvånansvärt korrekt) modellerar man ögat som en kula av vatten med brytningsindex 1.3306. Pupillen ligger på ena sidan av kulan och där buktar den ut så att krökningsradien blir 5.1 mm och näthinnan ligger på den motsatta sidan 22 mm därifrån. Vilket objektsavstånd avbildas skarpt på näthinnan?

(Patienten är lite felsynt)

### Växthusbelysning – MBDTI 2010-05-29 uppgift A1

**Tema:** Växthus

Belysningen utformas för att så mycket som möjligt likna solljus. Ofta används gasurladdningslampor vars lysande yta är (ser ut som) en kvadrat med sidan 12 mm. Denna yta avbildas sedan mot marken med en lins. Antag att lamporna sitter på 2.20 m höjd (= avstånd lins-mark) och ska sitta i rader och kolumner med 1.8 m mellanrum. Vilken fokallängd ska linsen ha för att de belysta fläckarna inte ska överlappa och inte ha några mörka avsnitt mellan sig?

## Triangulering – IMT 2002-03-05 uppgift 4

**Tema:** Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Vid angöring i hamn (dvs när fartyget lägger till) använder man laseravståndsmätare för att mäta avståndet till kajkant under de sista metrarna. Därvid belyser man en fläck på kajkanten, med en stråle som går rakt (=vinkelrätt) ut från skrovets sida. Den belysta fläcken betraktas sedan av en sorts TV-kamera belägen 10 cm vid sidan av laserstrålen. Denna har en lins med  $f = 10$  mm. TV-kameran ”tittar“ rakt ut från skrovet, dvs dess symmetriaxel är parallell med laserstrålen.

Plotta (=graderade axlar) hur bilden av laserpunkten flyttar sig på TV-kamerans ljuskänsliga yta som funktion skrovets avstånd till kajkanten för avstånd från 3 m ner till 3 dm

## Dispersion – FCL 2008-06-02 uppgift B2

**Tema:** Alhazen

Han lägger också grunden till färgläran genom att dela upp vitt ljus i sina våglängdskomponenter. För att göra detta använder han prismor där glaset har olika brytningsindex för olika våglängder. Detta fenomen kallas dispersion och beskrivs numera ofta av den relativa dispersionen

$$RD \equiv \frac{n_{\text{blå}} - n_{\text{röd}}}{n_{\text{grön}} - 1}.$$

Visa att för en planokonvex lins med styrkan  $P$  gäller att

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_{\text{blå}} - P_{\text{röd}}}{P_{\text{grön}}} = RD.$$

## 2 Extrauppgifter

### Fingeravtryck – IMT 2000-10-25 uppgift 1

**Tema:** Personidentifiering

I de flesta fallen läser man in fingeravtrycken optiskt dvs en lins avbildar fingertoppen på en detektor. I ett fall är detektorytan  $3 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$  och fingertoppen får antas vara mindre än  $18 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$ . Detta vill man avbilda mha ett linssystem som består av två tunna linser tätt intill varandra med fokallängder 20 mm resp 15 mm. Hur ska fingertopp och detektor placeras i förhållande till linspaketet?

### Övervakningskamera – FCL 2009-06-04 uppgift A5

**Tema:** Proaktiv säkerhet i bilar

En kamera (eller flera kameror) är naturligtvis en nyckelkomponent i ett övervakningssystem. Vilken fokallängd behövs för att ge ett synfält på  $\pm 45^\circ$  (vilket inte är en liten vinkel) med ett chip vars bredd är 8.10 mm? Bortse från aberrationer.



### Stereoseende – MBDTI 2010-06-03 uppgift A4

**Tema:** Robotdammsugare

Dammsugaren innehåller många olika optiska sensorer för att kunna känna av väggar, trappsteg, stolsben mm. Oftast består de av en lysdiod som ljuskälla som belyser en yta som man tittar på med en eller flera kameror. Om avstånd ska bestämmas är det ofta två kameror som är monterade parallellt, där man tittar på hur mycket bilden av ett objekt förskjuts i den ena jämfört med den andra. Antag att man med 12 mm fokallängd får en förflyttning av bilden av ett givet objekt 1.8 mm om kamerorna är placerade 20 mm från varandra. Hur långt bort ligger objektet?

### Fjärrkontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A1

**Tema:** Fjärrkontroller

Fjärrkontroller för hemelektronik innehåller nästan alltid lysdioder som avger strålning vid 800-900 nm dvs infrarött ljus. Sändarsidan utgörs av ett chip (punktformigt) som ligger 3 mm under en lins med fokallängd 4 mm. Uppskatta spridningsvinkeln.

## 3 Lösningar

### Ljusledare – IMT 2000-01-11 uppgift 5

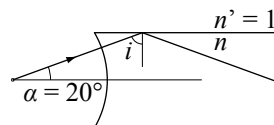
**Lösning:**

Eftersom dioden ligger i krökningscentrum till ytan, kommer ljuset inte att brytas när det går in i plasten. Den minsta infallsvinkeln mot cylinderytan blir då  $i = 90^\circ - \alpha = 70^\circ$ .

För att få totalreflektion krävs att

$$\sin i > \frac{n'}{n} \Rightarrow n > \frac{1}{\sin i} = 1.06.$$

Brytningsindex på plasten måste alltså vara minst 1.06, vilket alla plaster uppfyller.



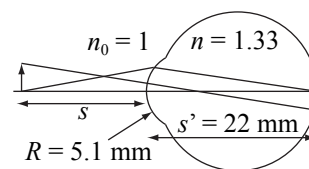
### Ögonmodell – F 2003-03-06 uppgift 4

**Lösning:**

Vi vill beräkna vilket objektsavstånd  $s$  som ger bildavstånd  $s' = 22$  mm för en yta med krökningsradie  $R = 5.1$  mm. Formeln för avbildning i sfärisk gränssyta ger

$$\frac{n_0}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n - n_0}{R} \Rightarrow s = \frac{n_0}{\frac{n - n_0}{R} - \frac{n}{s'}} = 230 \text{ mm.}$$

Ögat är alltså lite närsynt.



### Växthusbelysning – MBDTI 2010-05-29 uppgift A1

**Facit:** 12 mm sidan ska avbildas på 1.8 m = 1800 mm, dvs förstoringen ska vara 150 ggr. Bildavståndet ska vara 2.2 m vilket då ger ett objektsavstånd 14.67 mm, vilket i sin tur med linsformeln ger  $f = 14.77$  mm.

Vill man använda projektorapproximationen direkt kan man naturligtvis göra det.

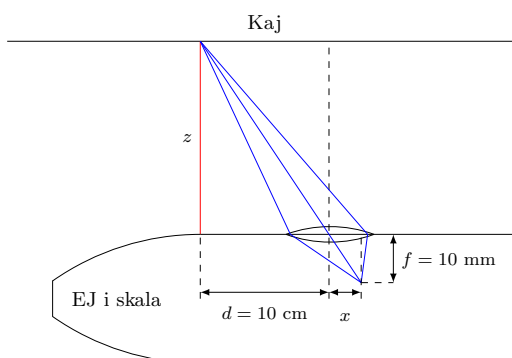
### Triangulering – IMT 2002-03-05 uppgift 4

**Facit:**

Bilden av den belysta punkten hamnar i eller i närheten av linsens fokalplan. Likformiga trianglar ger då

$$z/d = x/f \Rightarrow d = \frac{zf}{x}$$

Plottas och blir en 1/x-kurva.



### Dispersion – FCL 2008-06-02 uppgift B2

**Facit:** Styrkan för en planokvex lins är

$$P = \frac{n-1}{r} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \frac{\frac{n_{\text{blå}}-1}{r} - \frac{n_{\text{röd}}-1}{r}}{\frac{n_{\text{grön}}-1}{r}} = \frac{n_{\text{blå}} - n_{\text{röd}}}{n_{\text{grön}} - 1} = RD$$

### Fingeravtryck – IMT 2000-10-25 uppgift 1

**Facit:** Avbildningen ska uppenbarligen vara förminskande 1:6 vilket ger oss att linsformeln blir

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p/6} = \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow p = 60 \text{ mm} \Rightarrow q = 10 \text{ mm}.$$

### Övervakningskamera – FCL 2009-06-04 uppgift A5

**Facit:**

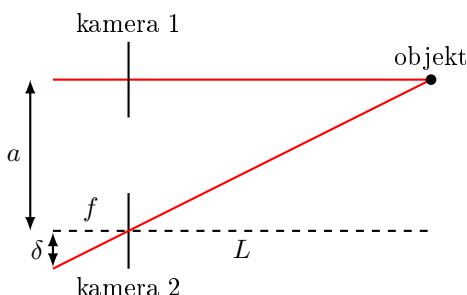
$$\frac{d_{\text{max}}}{2f} = \tan 45^\circ \Rightarrow f = 4.05 \text{ mm}$$

### Stereoseende – MBDTI 2010-06-03 uppgift A4

**Lösning:** Antag att ett objekt ligger rakt fram på avstånd  $L$  från den ena kameran. I den andra kameran kommer det att ligga förskjutet i sidled med vinkeln  $20 \text{ mm}/L$ . Kamerans ljuskänsliga sensor ligger (enligt kameraapproximationen)

12 mm (fokallängden) bakom linsen. Det innebär att förskjutningen av bilden på sensorytan blir fokallängden gånger förskjutningsvinkeln,

$$\delta = \frac{fa}{L} \Rightarrow L = \frac{af}{\delta} = \frac{20 \cdot 12}{1.8} \text{ mm} = 133 \text{ mm}$$



### Fjärrkontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift A1

**Lösning:** Chipets avstånd till linsen är mindre än fokallängden så strålningen blir divergent (och en imaginär bild hamnar före linsen). Spridningsvinkeln  $\alpha$  ges ur figuren nedan

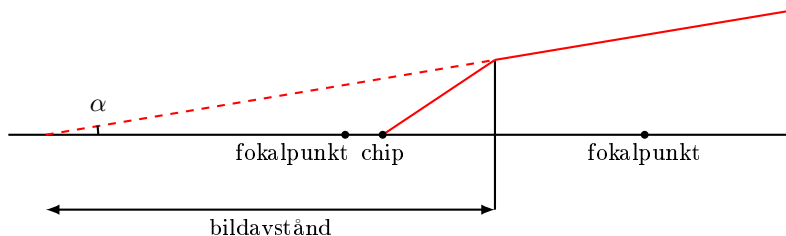
$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{linsradie}}{\text{bildavstånd}}\right)$$

Bildavståndet ges av linsformeln:

$$\frac{1}{3 \text{ mm}} + \frac{1}{\text{bildavstånd}} = \frac{1}{4 \text{ mm}} \Rightarrow \text{bildavstånd} = \frac{3 \cdot 4}{3 - 4} = -12 \text{ mm}.$$

Linsens storlek är inte känd, men vi vet fokallängden och att vi förmodligen har en liten lins (billigt och praktiskt). En vanlig lins har normalt inte mindre bländartal än 1, så vi räknar med det. Att räkna med ett annat bländartal är också ok. Bländartal = 1 betyder att  $D = f$  så radien är  $D/2 = f/2 = 2 \text{ mm}$ . Spridningsvinkeln blir då

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{linsradie}}{\text{bildavstånd}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{12}\right) = 9.46^\circ \approx 10^\circ$$



# Optiska system (kap. 34)

## 1 Övningsuppgifter

### Mikroskop – BD 2009-05-27 uppgift A4

**Tema:** Mineralogiska undersökningsinstrument

Ett mikroskop är ju standard som metod att optiskt inspektera ett mineral. Antag att man vill att objektivförstoringen ska vara 8 ggr, och att både objektivet och okularet har en fokallängd på 20 mm. Hur stort blir avståndet mellan objekt (inte objektiv) och okular?

### Ugnskikare – IMT 2002-04-12 uppgift 1

**Tema:** Restauranter och restaurantkök

I restauranter med gammaldags stenugn behöver man ofta kunna se en bra bit in i ugnen, med förstoring. Därför finns ugnskikare att köpa. Dessa är avsedda för objektsavstånd på ca 1 m, har ett objektiv med fokallängd 100 mm och ett okular med fokallängd 25 mm. Avståndet mellan är valt så att slutbilden hamnar i oändligheten. Vilken blir vinkelförstoringen?

(OBS att den färdiga formeln i boken gäller oändligt objektsavstånd)

### Ljusbom 2 – FCL 2009-05-18 uppgift B2

**Tema:** Arbetsplatssäkerhet

För att förhindra klämolyckor vid maskiner med många rörliga delar har man ofta ljusbommar bestående av en laserstråle med ställbar diameter. Laserstrålen är från början parallell (kollimerad) och ska vara det efter passage av systemet också.

Systemet består av 2 st  $f = 20$  mm linser som kan placeras allt från  $d = 20$  mm ifrån varandra till tätt intill varandra,  $d = 0$  mm, följt av en lins med  $f = 200$  mm. Avståndet till sista linsen ( $f = 200$  mm) ändras så att systemet hela tiden är afokalt. Plotta linssystemets förstoring av laserstrålen som funktion av  $d$  (graderade axlar).

### Kirurgmikroskop – F 2003-03-06 uppgift 1

**Tema:** Kirurghjälpmiddel

Vid detaljkirurgi har kirurgen numera alltid ett slags kikarmikroskop på sig, bestående av en 50 mm-lins närmast offret (patienten) och en -15 mm omedelbart framför doktorsögat.

Avståndet patient till 50 mm-lins kan sättas till 400 mm (fixt) och den negativa linsen placeras så att bilden hamnar på samma ställe som objektet (för att doktors avståndskänsla ska bli rätt).

Hur långt ska det vara mellan linserna?

(Detta är delvis en övning i minustecken, tänk på det!)

## 2 Extrauppgifter

### Ljusbom – FCL 2009-05-18 uppgift A4

**Tema:** Arbetsplatssäkerhet

För att förhindra klämolyckor vid maskiner med många rörliga delar har man ofta ljusbommar bestående av en laserstråle med ställbar diameter. Diametern ställs genom ett linssystem. Laserstrålen är från början parallell (kollimerad) och ska vara det efter passage av linssystemet också.

Ett system består av en lins med  $f = -30$  mm och en annan med  $f = 180$  mm. Strålen har från början diametern 2 mm. Avståndet mellan linserna ska helst vara 150 mm. Hur kommer strålen att se ut om avståndet i stället skulle bli 152 mm? (Divergent eller konvergent? Med vilken vinkel?). Försumma diffraktionen.

### Vidvinkelkonverterare – I 020109 uppgift 1

**Tema:** "High End"-kameror

En kamera (Canon PowerShot G2) kan förses med "vidvinkelkonverter", vilket är ett linspaket som sätts på framför befintligt linspaket. Tillsatsen är avsedd att ge större synfält (=vidare synvinkel) utan att behöva fokusera om kameran.

Beskriv hur du tror den fungerar (figur med exempel och förklarande text)

Ledning: Både bild och objekt till vidvinkelkonverterern ligger i oändligheten.

### Kikare – FCL 2008-06-02 uppgift B1

**Tema:** Alhazen

En kikare han föreslog var ( $z$ -axel i ljusets riktning)

$Z = 0$  mm    Lins med  $f = 60$  mm

$Z = 90$  mm    Lins med  $f = 15$  mm

$Z = 100$  mm    Lins med  $f = -20$  mm

Visa med strålkonstruktion att detta system är afokalt och bestäm vinkelförstoringen.

### Fibermikroskop – IMT 2001-10-26 uppgift 2

**Tema:** Skarvning av optiska fibrer

Den vanligaste tekniken för att skarva ihop fibrerna är att svetsa ihop dem med en ljusbåge. Detta vill man kunna titta på med ett mikroskop bestående av två linser. Den första (närmast fibern) på  $f_1 = 5$  mm och den andra på  $f_2 = -2$  mm. Linserna ligger 4 mm från varandra. Bilden ska hamna 200 mm efter sista linsen. Var ska objektet placeras?

Ej poänggivande följdfråga: Vad tror du det är för ngt speciellt med denna linskombination?

### 3 Lösningar

#### Mikroskop – BD 2009-05-27 uppgift A4

**Facit:** För objektivet gäller  $s' = 8s$ , vilket i linsformeln ger

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{8s} = \frac{1}{f} \Rightarrow s = \frac{9}{8}f = 22.5 \text{ mm} \Rightarrow s' = 9f = 180 \text{ mm}$$

Mellanbilden ska ligga på fokallängds avstånd från okularet dvs 20 mm. Den sökta sträckan blir alltså 222.5 mm.

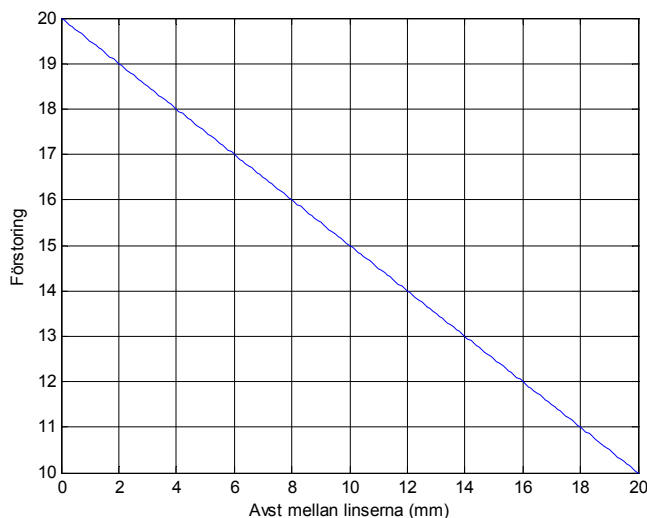
#### Ugnskikare – IMT 2002-04-12 uppgift 1

**Facit:** Den första linsen ger en bild på 111 mm avstånd. Denna bör ligga 25 mm före den andra linsen eftersom slutbilden ska ligga i oändligheten. Avståndet mellan linserna blir alltså 136 mm. Om storleken på objektet är  $h$  blir den synvinkel objektet upptar (utan kikare)  $= h/(1000 \text{ mm} + 136 \text{ mm})$ .

Mellanbildens storlek är  $h' = h(111/1000) = 0.111h$ . Denna upptar synvinkeln  $0.111h/25$  mm. Kvoten mellan dessa vinklar är 5 vilket alltså är förstoringen.

#### Ljusbom 2 – FCL 2009-05-18 uppgift B2

**Facit:** Jfr fig. Den enda förstoring som är meningsfull är den faktor som diametern ökar med dvs teleskopförstoringen.



**Kirurgmikroskop – F 2003-03-06 uppgift 1**

**Facit:** Om vi kallar objektsavståndet till första linsen  $a_1 = 400$  mm och avståndet mellan linserna  $d$  (=sökst storhet) blir bildavståndet till första linsen

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = 57.143 \text{ mm} \Rightarrow a_2 = d - b_1 \Rightarrow b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{(d - b_1) f_2}{d - b_1 - f_2}$$

Vidare ska  $b_2$  väljas så att bilden hamnar vid objektet (då hamnar den i bildrymden och bildavståndet blir negativt).

$$b_2 = -(a_1 + d)$$

Sätter vi de bägge uttrycken för  $b_2$  lika får vi en andragradsekvation i  $d$  med lösning

$$d = 41.615 \text{ mm}$$

**Ljusbom – FCL 2009-05-18 uppgift A4**

**Facit:** 182 mm blir objektsavst till lins 2, vilket ger ett bildavstånd på 16.4 m. Mot den punkten konvergerar alltså strålen. Före lins 2 har strålen radien 6 mm. Konvergensvinkeln blir alltså 0.37 mrad

**Vidvinkelkonverterare – I 020109 uppgift 1**

**Lösning:** Objekt och bild i  $\infty$  betyder teleskop. För att öka synfältet ska vinkelförstoringen vara liten,  $|M_\alpha| < 1$ . För att inte vända bilden ska den vara positiv,  $M_\alpha > 0$ .  $M_\alpha = -\frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}} > 0$  betyder olika tecken på  $f_{\text{obj}}$  och  $f_{\text{ok}}$ .

$M_\alpha = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}} < 1$  betyder att  $|f_{\text{obj}}| < |f_{\text{ok}}|$ .

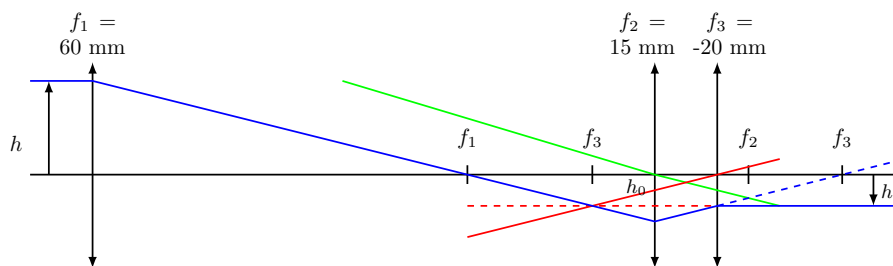
Avståndet mellan linserna ska vara  $d = f_{\text{obj}} + f_{\text{ok}} > 0$  vilket betyder att  $f_{\text{ok}}$  som har störst belopp ska vara positiv. Alltså  $f_{\text{obj}} < 0$  och  $f_{\text{ok}} > 0$ .

Exempel:  $M_\alpha = \frac{1}{5}$  och  $d = 100$  mm ger  $f_{\text{ok}} = 125$  mm och  $f_{\text{obj}} = -25$  mm.

**Kikare – FCL 2008-06-02 uppgift B1**

**Lösning:** Strålkonstruktion (valet av färg har ingen innebörd):

1. Dra en blå linje från lins 1 till lins 2 genom första linsens bakre fokalpunkt.
2. Dra en grön hjälplinje som är parallell med den blå.
3. Fortsätt den blå linjen från lins 2 till lins 3 så att den skulle skära den gröna i den andra linsens bakre fokalpunkt.
4. Dra en röd hjälplinje som är parallell med den blå linjen (mellan lins 2 & 3).
5. Fortsätt den blå linjen från lins 3 så att dess förlängning bakåt skär den röda hjälplinjen i den tredje linsens främre fokalpunkt. (främre eftersom  $f_3 < 0$ )



Linjen som utgår från lins 3 bör vara parallell med optiska axel (= teleskop). En enkel mätning i figuren visar att  $h' = -\frac{1}{3}h$ . Vinkelförstoringen är då alltså  $M_\alpha = h/h' = -3$ . Samma svar kan också räknas fram. Systemfokallängden för okularet är 20 mm vilket ger att vinkelförstoringen är  $M_\alpha = -f_{obj}/f_{oku} = -60/20 = -3$ .

### Fibermikroskop – IMT 2001-10-26 uppgift 2

**Facit:** Objektsavst till den andra linsen ska vara

$$p_2 = \frac{q_2 f_2}{q_2 - f_2} = \frac{200 \text{ mm} \cdot (-2 \text{ mm})}{202 \text{ mm}} = -1.98 \text{ mm},$$

dvs 1.98 mm till höger om lins 2, vilket är 5.98 mm till höger om lins 1.

Linsformeln för den första linsen ger då

$$p_1 = \frac{5.98 \text{ mm} \cdot 5 \text{ mm}}{0.98 \text{ mm}} = 30.5 \text{ mm}$$

Detta är ovanligt långt för ett mikroskopobjektiv, vilket man vill ha för att slippa få smuts från svetsprocessen på linsen.



# Interferens (kap. 35)

## 1 Övningsuppgifter

### Luftspalt – IMT 2001-10-26 uppgift 4

**Tema:** Skarvning av optiska fibrer

En liten luftspalt inne i svetsfogen är katastrofal eftersom den fungerar som en spegel. Vilka våglängder reflekteras starkast om luftspaltens tjocklek är 400 nm. Fiberns brytningsindex är 1.52.

### Rälssmörjning – IMTP 2006-10-26 uppgift 5

**Tema:** Tåg och säkerhet

För att minska slitaget på räls och hjul smörjer man bådadera. Blir det för lite olja ”skriker” hjulen. (Vem har inte hört det i tunnelbanan?) och blir det för mycket slirar hjulen. Det är alltså viktigt att kunna hålla kontroll på filmen av smörjmedel. Detta skulle man kunna göra genom att använda tunnskiktinterferens i filmen. Underlaget är metall, med en reflektans på 60% och filmens ovansida har en reflektans på 10%. Vilken modulation definierad som

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

får man i interferensmönstret? Bortse från multipelreflexer.

### Vinkel-AR – MTI 2003-08-29 uppgift 4

**Tema:** Plasma-TV

I synnerhet för åskådare som sitter snett i förhållande till bildytan kan reflexer vara ett problem. Av denna anledning gör man ofta en AR-behandling som är optimerad för exempelvis 45 graders betraktningvinkel i stället för 0 grader.

Vilken reflektans får man i noll grader för 550 nm våglängd med ett skikt som har brytningsindex 1.35 på ett substrat som har  $n = 1.72$ .

Reflektansen för en (1) ensam gränssyta ges av

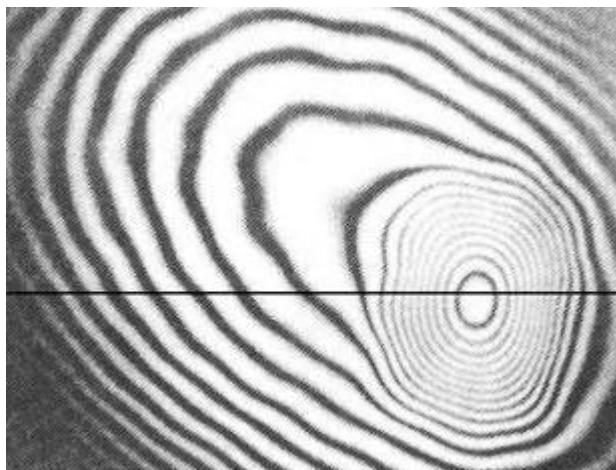
$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

Börja med att räkna ut hur tjock skiktet ska vara.

## Deformation – ILMP 2005-01-11 uppgift 5

**Tema:** Industriell positionering

Till höger ser du ett mönster från en Michelsoninterferometer med våglängd 633 nm. Mönstret kommer sig av att ena spegeln är deformerad. Rita ett diagram med graderade axlar över höjdvariationerna i spegeln utefter den svarta linjen.



## 2 Extrauppgifter

### Oljetransport – IMT 2002-03-05 uppgift 5

**Tema:** Teknologiska hjälpmedel för tankrederier

Ett problem vid oljetransporter i tropikerna är kondens av vattenånga i tankarna, vilket måste undvikas för att förhindra rostning inifrån. Av den anledningen kontrollerar man ofta med laserstråle om det finns ett tunt vattenskikt på ytan av oljan. Detta görs med en laser med två olika våglängder, tex 500 nm och 800 nm. Man mäter kvoten mellan reflexernas styrka för de bägge våglängderna och avgör på det sättet om det finns ett tunt vattenskikt eller inte.

Förklara hur detta fungerar.

### Sensor-AR – MTI 2009-05-20 uppgift A5

**Tema:** Lego Mindstorms

Det finns färgade lysdioder tillsammans med färgkänsliga ljussensorer att köpa. Sensorerna är ARbehandlade för "sin" färg dvs rött, grönt eller blått. Hur tjock ska ett skikt med brytningsindex 1.4 vara om glaset har brytningsindex 1.93? Räkna för våglängden 628 nm.

### Undervattenskamera – FCL 2008-08-18 uppgift A5

**Tema:** Resultatmätning vid idrottsevenemang

I simtävlingar har man ofta kameror som fotograferar under vatten, in i målmådet. Antag att man vill antireflexbehandla en sådan kameras frontglas

(mot vattnet) som har  $n = 1.71$ . Man kan välja mellan material med skiktindex: 1.35, 1.51, 1.70 och 1.91. Vilket ska man välja och varför?

### Randigt – Media 2010-03-19 uppgift B3

**Tema:** Optiska projektioner

Ibland vill man skapa "randigt ljus" för att få en måttskala projicerad på en yta. Detta görs ofta genom att låta två expanderade laserstrålar (ursprungligen från samma laser) interferera på en yta. Vilken vinkel ska det vara mellan laserstrålarna för att mönstret ska innehålla en period per cm? Våglängd 514 nm.

### Tvåskiktsbeläggning – IMT 2002-01-09 uppgift 4

**Tema:** digitala high end-kameror

Pga det stora antalet linsytor måste AR-behandling göras. Ofta görs denna som en tvåskiktsbeläggning. Antag att vi använder två material A med  $n_A = 2.15$  och B med  $n_B = 1.75$ . B läggs ytterst och A närmast glaset. Bör B göras en kvarts eller en halv våglängd tjockt?

### Ultraljudskontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B3

**Tema:** Fjärrkontroller

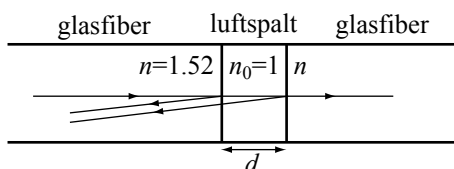
**A3:** En av de första fjärrkontrollerna för TV (Space Control hette den, kom på 50-talet och var amerikansk) byggde på ultraljud som skapades av metallstänger som sattes i vibration av användaren mekaniskt. Inget batteri behövdes alltså. Varje frekvens skapades av en "pinne" med speciell längd, och motsvarade en viss funktion på TVn exvis byt kanal ett steg uppåt. Ett uttryck för en sådan våg (i luft) skulle kunna vara  $s = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t + \delta)$  där  $A = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ ,  $\omega = 188000 \text{ rad/s}$  och  $k = 589 \text{ rad/m}$ .

**B3:** Antag att man vill använda ultraljud som i A3 men har tre elektriskt kontrollerade sändare som skickar ut samma frekvens i samma fas. De är placerade på rad. Hur långt ska det vara mellan dem för att det ska bli total intensitet = 0 i riktningen längs raden (idealt)?

## 3 Lösningar

### Luftspalt – IMT 2001-10-26 uppgift 4

**Lösning:**



Vi ser luftspalten som ett tunnt skikt av luft med vinkelrätt infallande ljus. Det är en reflektion mot tätare medium, så skillnaden i optisk väglängd mellan de två reflektionerna blir

$$\Delta\text{OPL} = 2n_0d \cos(0) + \lambda/2 = 2d + \lambda/2.$$

Maximal konstruktiv interferens i reflektionen fås då

$$\Delta\text{OPL} = m\lambda,$$

för heltal  $m$ . Detta blir tillsammans

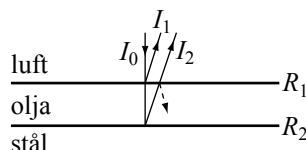
$$2d + \lambda/2 = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d}{m - \frac{1}{2}}$$

De första väglängderna som får hög reflektans blir alltså

$$\lambda_1 = 1600 \text{ nm}, \lambda_2 = 533 \text{ nm} \text{ och } \lambda_3 = 320 \text{ nm}.$$

### Rälsmörjning – IMTP 2006-10-26 uppgift 5

**Lösning:**



Intensiteten i reflexen kommer variera med tjockleken på grund av tunnfilmsinterferens. Intensiteterna på de två reflexerna var för sig är

$$I_1 = R_1 I_0, I_2 = (1 - R_1) R_2 (1 - R_1) I_0 = R'_2 I_0,$$

där  $R_1 = 0.1$ ,  $R_2 = 0.6$ ,  $I_0$  är den infallande intensiteten och vi får den effektiva reflektansen hos andra ytan som  $R'_2 = 0.49$ . Den totala reflekterade intensiteten blir

$$I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi = I_0 \left( R_1 + R'_2 + 2\sqrt{R_1 R'_2} \cos \Delta\phi \right).$$

Detta ger

$$I_{\max} = I_0 \left( R_1 + R'_2 + 2\sqrt{R_1 R'_2} \right) \text{ och}$$

$$I_{\min} = I_0 \left( R_1 + R'_2 - 2\sqrt{R_1 R'_2} \right),$$

vilket ger modulationen

$$m = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{R_1 R'_2}}{R_1 + R'_2} = 0.75$$

**Vinkel-AR – MTI 2003-08-29 uppgift 4**

**Facit:** Brytningsvinkeln i skiktet (vid  $i=45^\circ$ ) blir  $31.6^\circ$ .

AR ger då att:

$$2nd \cos b = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4n \cos b} = 119 \text{ nm}$$

$R$  för de bägge gränssytorna blir då med den givna formeln  $R_1 = 0.0222$  och  $R_2 = 0.0145$ .

Totala reflektansen blir då

$$\begin{aligned} R_{\text{tot}} &= R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{2n \cos 0^\circ \lambda}{4n \cos b}\right) \\ &= R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos\left(\frac{\pi}{\cos b}\right) = 0.006 \end{aligned}$$

**Deformation – ILMP 2005-01-11 uppgift 5**

**Facit:** Varje svart frans betyder en halv våglängd i höjdskillnad. Det är sjutton fransar mellan vänsterkant på bild och bergets topp (eller gropens botten, vilket vet man inte). Det motsvarar  $5.4 \mu\text{m}$ . Från bergets topp och högerut är det 12 fransar dvs  $3.7 \mu\text{m}$ .

**Oljetransport – IMT 2002-03-05 uppgift 5**

**Facit:** Vid interferens i tunt skikt blir reflektansen kraftigt våglängdsberoende och kvoten mellan mätvärdena borde bli stor. Däremot är reflektansen från en enkel yta bara beroende av brytningsindexen vilka inte har så kraftigt våglängdsberoende.

**Sensor-AR – MTI 2009-05-20 uppgift A5**

**Facit:** Skiktets tjocklek ges av

$$2nd \cos 90^\circ = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_{\text{vac}} \Rightarrow d = \frac{\lambda_{\text{vac}}}{4n} = 112 \text{ nm}$$

**Undervattenskamera – FCL 2008-08-18 uppgift A5**

**Facit:** För att en antireflexbeläggning ska kunna fungera bra måste bägge reflexerna vara ungefär likstarka. Detta kan bara ske om brytningsindexsteget vatten/skikt och skikt/glas är ungefär likstora. Det är då bara 1.51 som kan komma i fråga

**Randigt – Media 2010-03-19 uppgift B3**

**Facit:** Avståndet mellan fransar vid interferens ges av

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{514 \text{ nm}}{1 \text{ cm}} = 51 \mu\text{rad}$$

Härleds eller tas från holografienomgången.

**Tvåskiktsbeläggning – IMT 2002-01-09 uppgift 4**

**Facit:** Reflektanserna från de tre gränssytorna är

$$R_1 = \left( \frac{1 - 1.75}{1 + 1.75} \right)^2 = 0.07, \quad R_2 = \left( \frac{1.75 - 2.15}{1.75 + 2.15} \right)^2 = 0.01,$$

$$R_3 = \left( \frac{2.15 - 1.55}{2.15 + 1.55} \right)^2 = 0.03.$$

(Räknar man amplituder blir det kvadratrötterna ur dessa värden)

Uppenbart ska reflex två och reflex tre samverka gentemot reflex ett för att minimera reflexerna. Vägskillnaden mellan ett och två ska då vara en halv våglängd. Eftersom bägge reflexerna runt detta skikt sker mot tätare medium ska skiktjockleken därmed vara en kvarts våglängd.

OBS att bara rätt svar inte ger många tiondelar i poäng

**Ultraljudskontroll – FBDMTI 2009-08-17 uppgift B3**

**Facit:** De måste ligga på en tredjedelsvåglängds avstånd från varandra, dvs  $1.06 \text{ cm}/3 = 3.6 \text{ mm}$ .

# Diffraction och Polarisation (kap. 33+36)

## 1 Övningsuppgifter

### DPI – Media 2003-03-07 uppgift 2

**Tema:** Flatbäddsscanners

Skälet till att man inte gör så är att man inte kan få tillräckligt med DPI (dots per inch). Man vill idag ofta ha minst 1200 DPI. Hur många finns det anledning att ha om resultatet ska skrivas ut i skala 1:1 och betraktas av en person med 10 D ackommodation och pupilldiameter 2 mm.

(Han använder inte lupp när han tittar på pappret)

1 inch = 1" = 25.4 mm

### Jättemegafon – F 2005-06-01 uppgift 3

**Tema:** Rockfestivaler

För att undvika ekon gör man ibland scenerna i form av en jättemegafon som alltså riktar ljudet genom att skapa en tratt med mynning mycket större än våglängden. Antag att vi har en sådan tratt med diameter 12 m och vi spelar 115 Hz "musik" (tysk industrisynt) i den. Hur många dB vinner man i framåtriktningen pga tratten?

### Laserkvast – IMTP 2006-01-13 uppgift 5

**Tema:** seende och kännande robotar

Man vill dessutom göra en "kvast" av laserstrålar, dvs 25 laserstrålar med våglängd 633 nm som sprids i en vinkel  $\pm 20^\circ$ . Någon föreslår ett gitter för detta ändamål. Vilken ungefärlig linjetäthet och spaltbredd bör man i så fall ha? Vad blir nackdelen med denna konstruktion?

### Ljusstreck – IMTP 2007-01-15 uppgift 5

**Tema:** Meteorologiska instrument

I mycket kallt väder kan man ofta se att det bildas ljusstreck över en gatulampa. (Se bild). Dessa beror på reflektion i små svävande isplattor. Ljuset är kraftigt polariserat. I vilken riktning? Motivera.



## 2 Extrauppgifter

### Solljusgitter – MTPI 2005-08-22 uppgift 5

**Tema:** Solforskning och norrsken

Solljuset analyseras ofta med hjälp av instrument som innehåller gitter. Vilket antal ritsar per mm ska ett gitter ha för att hela första ordningen av synligt ljus (400 nm-700 nm) ska vara synligt vid vinkelrätt infall?

### Ultraljudsmörning – IMT 2002-04-12 uppgift 5

**Tema:** Restauranter och restaurantkök

En i Sverige (förhoppningsvis) icke förekommande “matlagningsmetod” är att efter stekning av kött utsätta detta för ultraljudsvågor, för att slita sönder senor och liknande så att köttet ska bli mört. Frekvensen på detta väljs så att det ungefär motsvarar en resonansfrekvens i det man vill göra mört. Dessa ligger i allmänhet runt ca 1 MHz. Kan man rikta sådant ultraljud mot köttet eller kommer det att spridas i en halvsfär? Hur stor måste sändaren i så fall vara (=storleksordning)?

### Dubbelbrytning – BD 2009-05-27 uppgift A5

**Tema:** Mineralogiska undersökningsinstrument

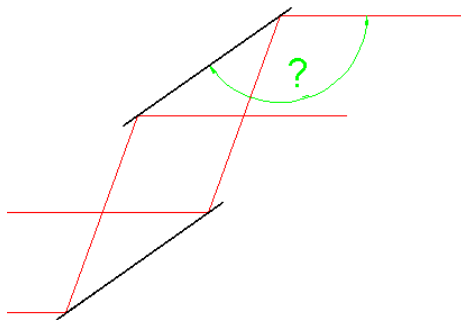
När man mikroskopierar mineral är den vanligaste metoden (förutom att bara subjektivt titta) att mäta dubbelbrytning. Man har då två polarisationsfilter som bägge kan vridas. För en kristall varierar ljuset som går igenom mellan vitt och svart när man vrider polaroiden och för en annan varierar det i många olika färger. Vilken av kristallerna har störst dubbelbrytning? Motivera! (Enbart rätt svar ger inga poäng).

### Polarisationsperiskop – MTI 2008-06-02 uppgift A2

**Tema:** Alhazen



Han studerade också polarisation, framför allt av himmelsljuset. Han hade naturligtvis inga polarisationsfilter av den typ vi har idag, men uppfann (tror man) ett periskop med vilket man kunde studera en polarisationsriktning i taget. I figuren nedan är svart glasplattor med  $n = 1.55$  och rött ljusstrålar. Hur stor ska vinkeln markerad med ? vara?



### Ultraljudsdiffraction – MTI 2009-05-20 uppgift B3

**Tema:** Lego Mindstorms

Det finns också ultraljudssensorer, som arbetar med frekvensen 570 kHz. Antag att fem sändare befinner sig bredvid varandra och matas med samma signal. Varje sändare är cirkulär och har diametern 9.0 mm. Avståndet mellan dem (mittpunktsavstånd) är 25 mm. På en meters avstånd får man ju då ett kombinerat interferens och diffraktionsmönster. Hur många interferensmax får det då plats inom det centrala diffraktionsmax?

## 3 Lösningar

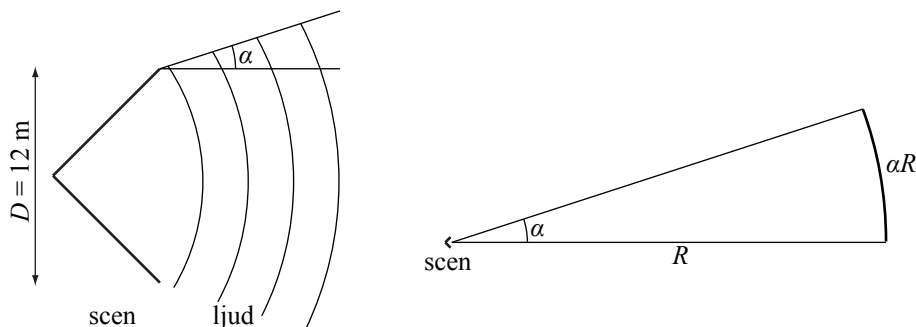
### DPI – Media 2003-03-07 uppgift 2

**Facit:** Ett öga som ackomoderat 10 D betraktar objekt på 100 mm avstånd. Två objekt (=dots!) är upplösta om de har en vinkel

$$\alpha = \frac{1.22\lambda}{D} = 0.33 \text{ mrad}$$

emellan sig. För ett objekt på 100 mm avstånd motsvarar detta 33  $\mu\text{m}$ , dvs 30 dots/mm vilket är 750 DPI.

Sedan läser väl de flesta inte sina dokument på 100mm avstånd även om de kan det.

**Jättemegafon – F 2005-06-01 uppgift 3****Lösning:**

Eftersom scenen är större än våglängden kan man rikta ljudet någorlunda. Från frekvensen  $f = 115$  Hz och ljudhastigheten i luft  $c = 343$  m/s kan vi beräkna våglängden  $\lambda = c/f = 3$  m. Diffraktionsvinkeln blir då

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{1,22\lambda}{D} = 0,31 \text{ rad} = 17,7^\circ.$$

På stort avstånd  $R$  sprids ljudeffekten  $P$  då över ytan  $A = \pi(\alpha R)^2$  om det riktas av scenen och över ytan  $A' = 4\pi R^2$  utan scenen. Kvoten mellan intensiteterna blir då

$$\frac{I}{I'} = \frac{P/A}{P/A'} = \frac{A'}{A} = \frac{4\pi R^2}{\pi\alpha^2 R^2} = \frac{4}{\alpha^2} = 42.$$

Detta motsvarar en ljudnivåökning med

$$\Delta\beta = \log_{10}(44) \cdot 10 \text{ dB} = 16,2 \text{ dB}.$$

**Laserkvast – IMTP 2006-01-13 uppgift 5**

**Facit:** 12:e ordningen ska alltså ha vinkeln  $20^\circ$  vilket med gitterformeln ger

$$d \sin(20^\circ) = 12 \cdot 633 \cdot 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow d = 22 \text{ } \mu\text{m}$$

Vilket motsvarar 45 linjer/mm. Spaltbredden ska vara sådan att första min för diffractionen ska hamna utanför  $20^\circ$ , säg på  $25^\circ$ . Detta ger  $b = 1,5 \text{ } \mu\text{m}$ .

**Ljustreck – IMTP 2007-01-15 uppgift 5**

**Facit:** Plattorna ligger horisontella och polarisationen vinkelrätt mot infallsplanet (som alltså är vertikalt) reflekteras mest. Ljuset blir alltså horisontal polariserat (E-fältet i horisontalplanet).

**Solljusgitter – MTPI 2005-08-22 uppgift 5**

**Facit:** Att hela den första ordningen synligt ljus ska synas betyder att gitterekvationen ska vara lösbar för  $p = 1$  och alla synliga våglängder. Rött ljus

sprids mest och vi använder därför 700 nm för dimensionering.

$$d \sin \theta = 1\lambda \Rightarrow d = \frac{\lambda}{\sin \theta} = \lambda = 700 \text{ nm}$$

Detta motsvarar 1430 ritsar/mm.

### Ultraljudsmörning – IMT 2002-04-12 uppgift 5

**Facit:** 1 MHz motsvarar en våglängd på ca 0.3 mm. För att kunna rikta en våg (dvs för att diffraktionen inte ska göra det omöjligt krävs en sändare som är mycket större än så. En diameter på 3 cm ger följaktligen en spridning på ca 10 mrad (en halv grad). Ja det går.

### Dubbelbrytning – BD 2009-05-27 uppgift A5

**Facit:** Svartvit ljusväxling blir det helt utan någon dubbelbrytning om man vrider en av polaroiderna. Färg kan bara uppkomma om man har dubbelbrytning.

### Polarisationsperiskop – MTI 2008-06-02 uppgift A2

**Facit:** För att få en polarisationsriktning i taget måste ljuset falla i Brewster-vinkel. För  $n = 1.55$  blir denna  $57^\circ$ , dvs den sökta vinkeln är  $147^\circ$ .

### Ultraljudsdiffraktion – MTI 2009-05-20 uppgift B3

**Facit:** Sändarna bildar ett gitter (eller hur?) med spaltavstånd = 2.8 diameter. Det får alltså plats sju max (0:te, +-1:a, +-2:a och +-3:e).