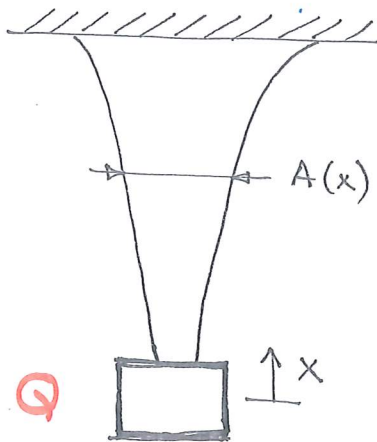


2.1.9

→ En gruvlina som skall dimensioneras optimalt

→ så att spänningen blir lika stor i alla tvärsnitt.

GIVET:



• Last: Q

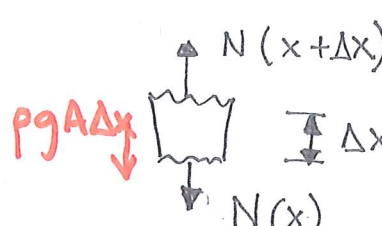
• Tillåten spänning: σ_{till}

• Densiteten hos linan: ρ

⇒ Linsens egentyngd måste beaktas.

SÖKT: $A(x)$

LÖSNING:

1. Snitta i en Δx : 

Egentyngden i Δx : $m \cdot g = \rho V g = \rho A \Delta x g$

$$\text{jmv: } \uparrow - N(x) - \rho g A \Delta x + N(x + \Delta x) = 0$$

$$\frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} - \rho g A = 0$$

när $\Delta x \rightarrow 0$

[F.S. 6.3]

$$\frac{dN}{dx} - \rho g A = 0 \quad (1) \Rightarrow \text{Jämvikt-ekv.}$$

2) Definition på spänning $\sigma = \frac{N}{A}$ (2)

Sätt in (2) i (1):

$$\frac{d(\sigma A)}{dx} - \rho g A = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dx} \sigma_{till} - \rho g A = 0$$

spänningen ska vara lika stor i alla tvärsnitt.

ordna ekv: $\frac{dA(x)}{dx} - \frac{\rho g A(x)}{\sigma_{till}} = 0$

\rightarrow Lösning på Diff. Ekv: $A(x) = C_1 e^{\left(\frac{\rho g}{\sigma_{till}} x\right)}$ (3)
 Ansats $A(x) = C_1 e^{\frac{\rho g}{\sigma_{till}} x}$ i (1)
 $C_1 e^{\frac{\rho g}{\sigma_{till}} x} = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\rho g}{\sigma_{till}}$
Randvillkor: $x=0 \Rightarrow N = Q^+ \Rightarrow A(x=0) = \frac{Q}{\sigma_{till}}$ (4)

\uparrow
 m.h.a
 def på
 spänning: $N = \sigma A$
 \uparrow
 $\sigma_{till} A(x=0)$

Sätt in (4) i (3):

$$A(x=0) = \left[\frac{Q}{\sigma_{till}} = C_1 \right] \quad (5)$$

Sätt in (5) i (3)

$$A(x) = \frac{Q}{\sigma_{till}} e^{\left(\frac{\rho g}{\sigma_{till}} x\right)}$$

$$\left[\frac{dA(x)}{A(x)} \right]_{A_0}^A = \left[\frac{\rho g}{\sigma_{till}} dx \right]_{x=0}^x \Rightarrow \ln A - \ln A_0 = \frac{\rho g}{\sigma_{till}} x \Rightarrow$$

$$\ln \frac{A}{A_0} = \frac{\rho g}{\sigma_{till}} x \Rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{\frac{\rho g x}{\sigma_{till}}} \Rightarrow A(x) = A_0 e^{\frac{\rho g x}{\sigma_{till}}}$$