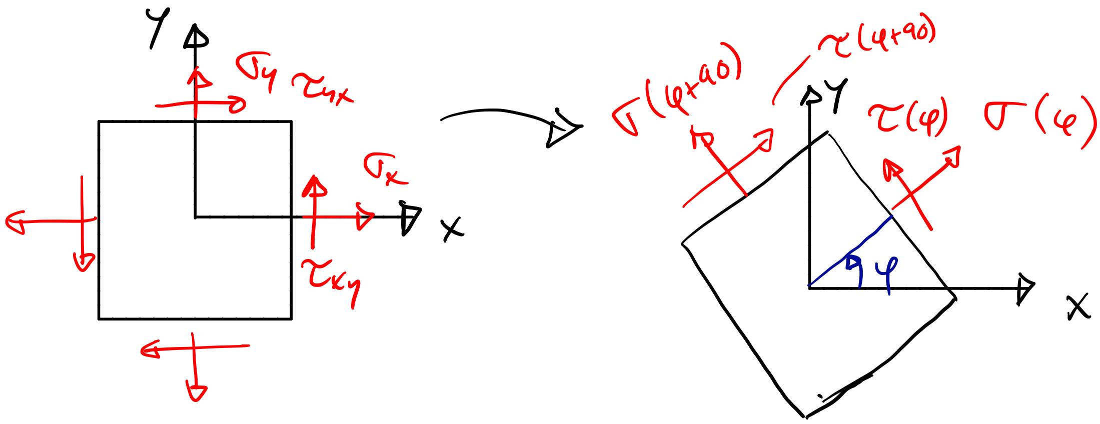
Övning 11: Spänningsanalys 2d.

Transformation av spänningar i 2d

$$(1.17) \qquad \sigma(\varphi) = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{xy} \sin\varphi \cos\varphi$$

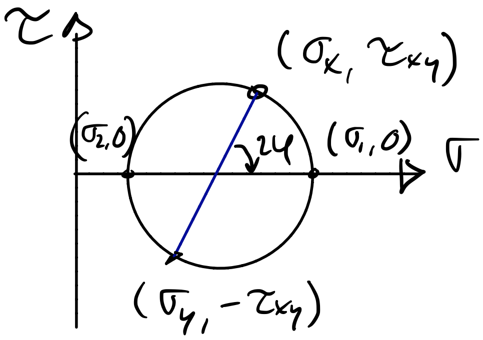
$$(1.18) \qquad \tau(\varphi) = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2 + \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$

Enligt def:

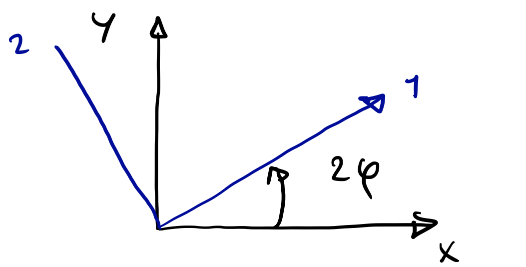


(FIGUR 1.5)

Kan även illustreras mha MOHRS SPÄNNINGSCIRKEL.



FYSIKALISKA PLANET

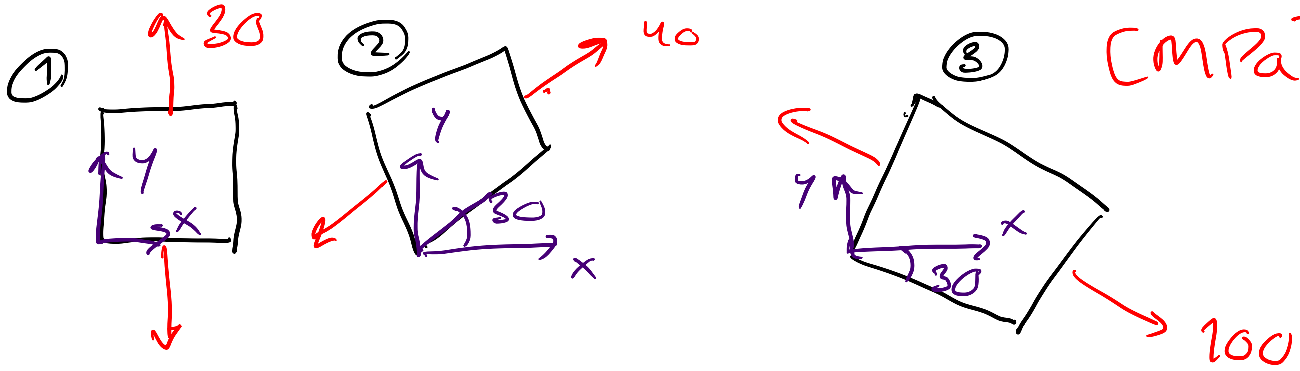


Från figuren fås:

$$(1.19) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + R \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - R \\ R = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2} \\ \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \end{cases}$$

1.1.14

Spänningstillståndet sammansatts av de tre dragspänningarna nedan. Beräkna husp & husp-riktningar.



Lösning

1) Rotera alla till xy-systemet mha MOHR.

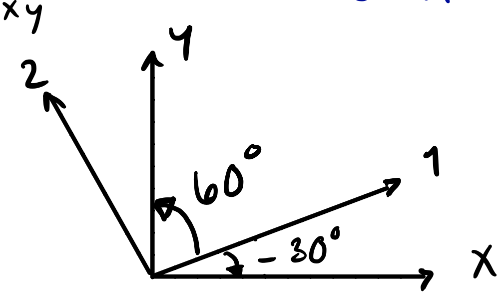
2) Addera ihop alla spänningsmatriser. $S_{tot} = S_1 + S_2 + S_3$

3) Använd MOHRs cirkel för att ta fram husp & husp-riktningar.

S_1

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}_{xy}$$ ← Är redan i xy-riktning!

S_2



(ersätt $x = 1$, $y = 2$)

$$S_2 = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{12}$$

$$(1.17) \rightarrow \sigma_x = \sigma(-30) = 40\cos^2(-30) + 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_x = 40 \cdot \tfrac{3}{4} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \sigma(60) = 40\cos^2(60) + 0 \ldots + 0 \ldots = 40 \cdot (1/4) = 10 \text{ MPa}$$

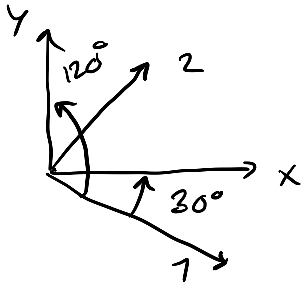
$$\tau_{xy} = \tau(-30) = -\tau(60) = \frac{0-40}{2}\sin(2 \cdot (-30)) + 0 \ldots$$

$$\Leftrightarrow \tau_{xy} = -\frac{40}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\sqrt{3} \text{ MPa}$$

$$\rightarrow S_2 = \begin{bmatrix} 30 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 10 \end{bmatrix}_{xy} \text{ MPa.}$$

$\underline{\underline{S_3}}$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$\sigma(30°) = \sigma_x$
$\sigma(120°) = \sigma_y$
$\tau(30°) = \tau_{xy}$
$(-\tau(120°) = \tau_{xy})$

$\sigma_x = \sigma(30) = 75$ MPa
$\sigma_y = \sigma(120) = 25$ MPa
$\tau_{xy} = \tau(30) = -25\sqrt{3}$ MPa

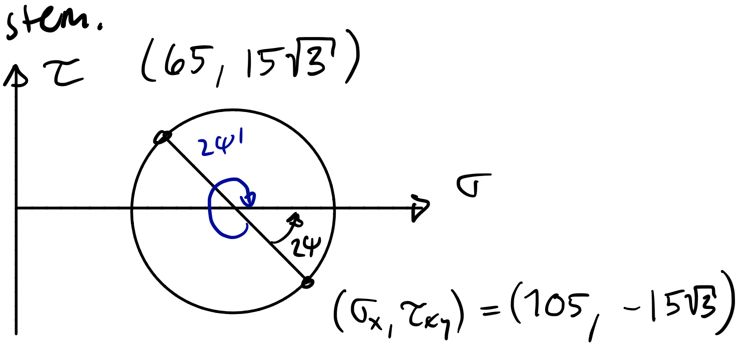
$$\rightarrow \underline{S_3} = \begin{bmatrix} 75 & -25\sqrt{3} \\ -25\sqrt{3} & 75 \end{bmatrix}$$

2) $\underline{\underline{S_{tot}}}$

$$\underline{S_{tot}} = \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{S_3} = \begin{bmatrix} 105 & -15\sqrt{3} \\ -15\sqrt{3} & 65 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

3)

Rotera till husp-system.



$$R = \sqrt{\left(\frac{105-65}{2}\right)^2 + 15\sqrt{3}^2} = 5\sqrt{43} \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(105+65) + R = 118 \text{ MPa}$$

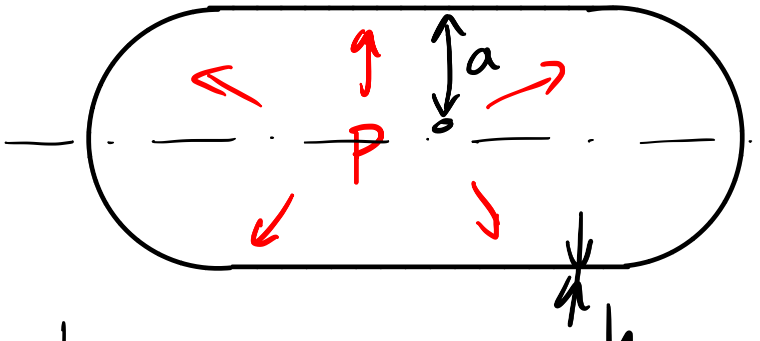
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(105+65) - R = 52 \text{ MPa}$$

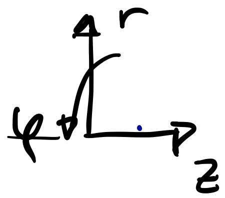
notera utan tecken här!

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{105-65} \rightarrow \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{atan}(1.299) = 26{,}2°$$

$\underline{\text{SVAR:}}$ $\begin{cases} \sigma_1 = 118 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 52 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$, I riktning $\varphi = 26{,}2°$ motsols.

2.8.1



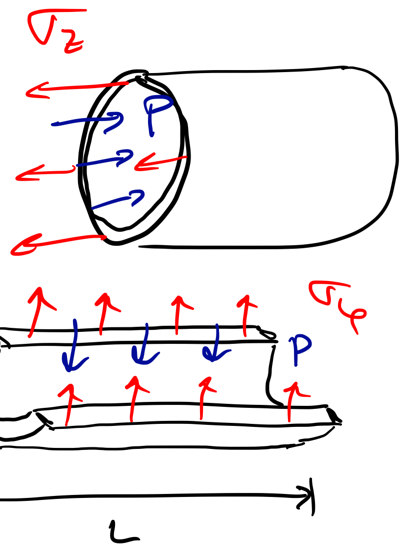


En tunnväggig cylindrisk gasbehållare belastas med ett inre övertryck P. Behållaren är tunnväggig. Spänningen i σ_φ antas vara konstant över tvärsnittet. σ_r antas $=0$.

Bestäm
ⓐ Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar
ⓑ Maximala skjuvspänningen i den cylindriska delen av behållarens vägg. Ange dessutom riktning på de snitt där denna uppträder.

Plan
1) Ta fram spänningstillståndet mha snitt.
2) Rotera till husp- med hjälp av mohr.
3) Räkna ut största skjuvspänning mha MOHR.

Lösning: ① Jämvikt



$$\rightarrow: \; P \cdot \pi a^2 - \sigma_z \cdot h \cdot 2\pi a = 0$$
$$\Leftrightarrow \sigma_z = \frac{Pa}{2h}$$

$$\uparrow: \; -P \cdot 2a \cdot L + \sigma_\varphi \cdot 2 \cdot L \cdot h = 0$$
$$\rightarrow \sigma_\varphi = \frac{Pa}{h}$$

AND
$$\left.\begin{aligned} \sigma_r(a+h) &= 0 \\ \sigma_r(a) &= -p \end{aligned}\right\} \approx 0.$$

$$\therefore \begin{cases} \sigma_z = \frac{Pa}{2h} \\ \sigma_\varphi = \frac{Pa}{h} \\ \sigma_r = 0 \end{cases}$$

Ångpanneformlerna

(7.31) i FS

Spänningsmatrisen

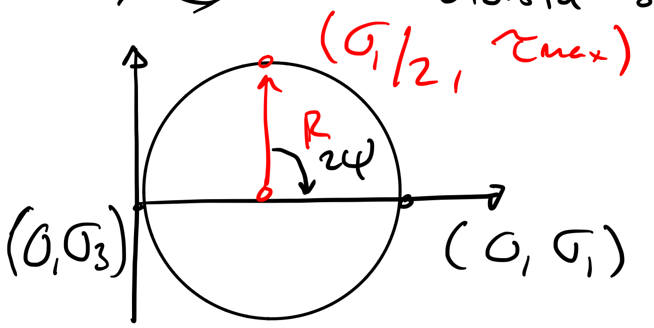
$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ -\|- & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \frac{Pa}{h} & 0 \\ & & \frac{Pa}{2h} \end{bmatrix}$$

Inga skjuvspänningar $\rightarrow \sigma_r, \sigma_\varphi$ & σ_z är huvudspänninger

$$\begin{cases} \sigma_1 = Pa/h \\ \sigma_2 = Pa/2h \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

b) 3

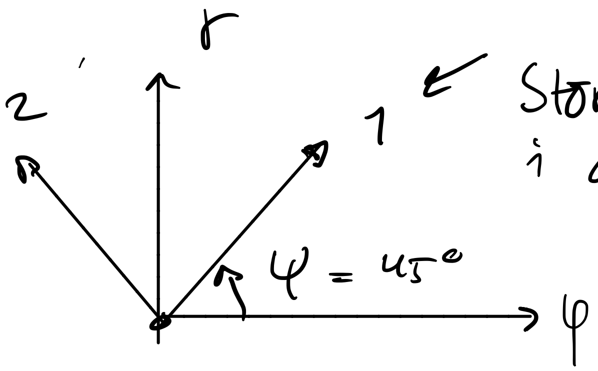
Största skjuv spänning är i 1-3-planet.



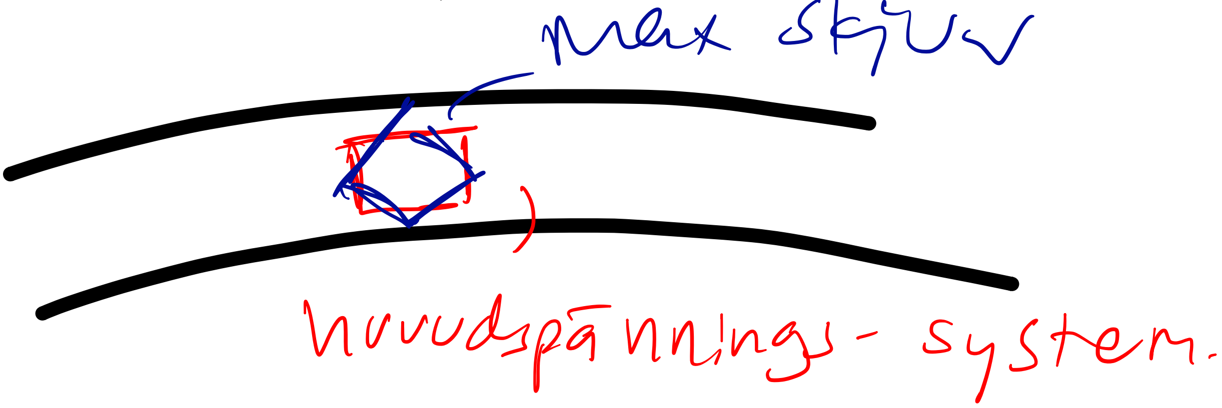
$$\tau_{max} = R = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) = \frac{(Pa/h - 0)}{2} = \frac{Pa}{2h}$$

$\underline{\underline{\text{SVAR}}}$: $\tau_{max} = \frac{Pa}{2h}$.

Använd eventuellt ekvation, (1.78), blir störst för $\varphi = \pm 45°$

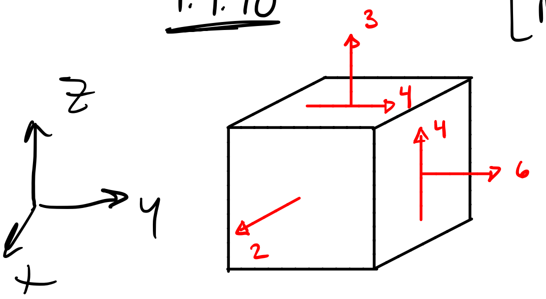


Störst skjuvspänning i detta snitt.



1.1.10

[MPa]

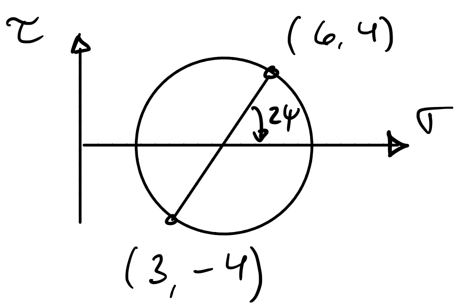


Bestäm: Huvudspänningarnas storlek & riktning

HUR?: Notera att σ_x är en huvudspänning. Använd MOHR.

$$S_{yz} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

1. MOHRS CIRKEL



$$(1.19) \rightarrow R = \left[\left(\frac{6-3}{2}\right) + 4^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2} + 16} = 4{,}27 \text{ MPa}$$

| planet 2D

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + R = 4{,}5 + 4{,}27 = 8{,}77 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - R = 4{,}5 - 4{,}18 = 0{,}228 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\tan(2\varphi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 4}{(6-3)} \rightarrow 2\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{8}{3}\right) \rightarrow \varphi = 69{,}4°$$

SVAR

3D
$$\begin{cases} \sigma_1 = 8{,}77 \\ \sigma_2 = 2 \\ \sigma_3 = 0{,}228. \end{cases}$$

| riktning enligt figur.