Övning 15: Effektivspänning och sammansatta problem.

TAL:

- 2.11.2
- 2.11.11
- 2.11.16
- 2.9.1
- 2.9.6

Effektivspänningen används för att avgöra när plastisk deformation initieras vid fleraxliga spänningstillstånd.

Alltså:

$$\begin{cases} \text{Enaxligt:} & \sigma = \sigma_s \\ \text{Fleraxligt:} & \sigma_e(\underset{\sim}{\sigma}) = \sigma_s \end{cases}$$

TVÅ EFFEKTIVSPÄNNINGSHYPOTESER:

1) Von Mises.

$$(3.30) \rightarrow \quad \sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2}$$

2) Tresca

$$(3.32) \rightarrow \quad \sigma_e = \max\left(|\sigma_1 - \sigma_3|\right)$$

Vilken man använder beror på vilken som bäst överensstämmer med det material / last man jobbar med.

Får man välja, ta Von Mises, kräver ej att man vet huvudspänningarna.

$\boxed{2.11.2}$ En analys med FEM misstänks ge felaktiga resultat. I en punkt som plasticerar erhålls följande resultat:

$$\sigma_x = 58{,}2 \text{ MPa} \qquad \sigma_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$$
$$\sigma_y = 240{,}1 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = 67{,}3 \text{ MPa}$$

Är Von Mises flytvillkor uppfyllt? Om inte, hur stort är felet?
Materialet är elastiskt - idealplastiskt med sträckgräns 250 MPa.

Lösning.

1) VM-effektivspänning.

$$(3.30) \rightarrow \sigma_e^{vm} = \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

Med värden

$$\sigma_e^{vm} = \left[58{,}2^2 + 240{,}1^2 - 58{,}2 \cdot 240 + 67{,}3^2\right]^{1/2}$$
$$= 246{,}3 \text{ MPa}$$

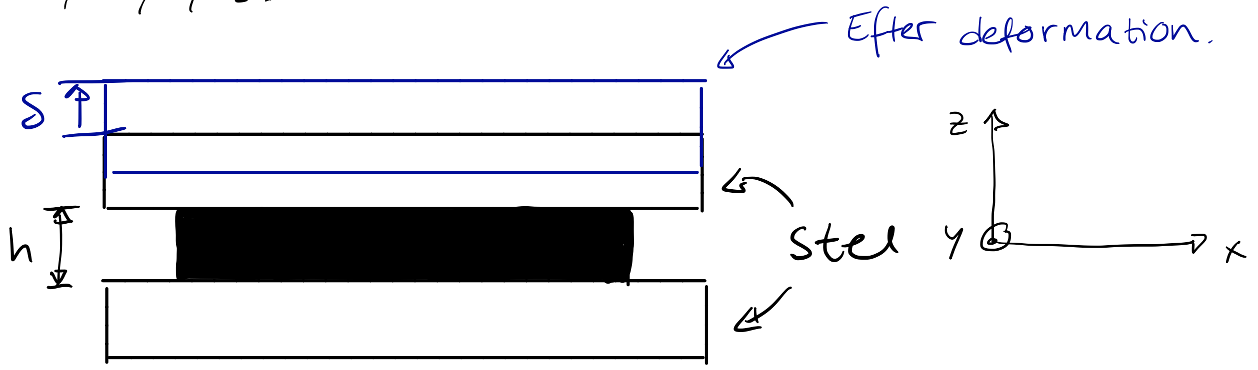
Vi ser att:

$$\sigma_e^{vm} < \sigma_s \quad , \quad 246{,}3 < 250 \quad !$$

Punkten borde inte plasticera. felet är:

$$e = \frac{\|\sigma_e^{vm} - \sigma_s\|}{\sigma_s} = \frac{\|246{,}3 - 250\|}{\sigma_s} = 1{,}49 \,\%$$

2.11.11 En tunn skiva är limmad mellan två plattor. Beräkna vid vilken relativ förskjutning δ som materialet plasticerar.
Givet: E, ν, σ_s.



Eftersom plattan är tunn kan vi anta att vi kan försumma alla töjningsbidrag utom ε_z,

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_y \approx 0 \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} \approx 0. \end{cases} , \quad \varepsilon_z \approx \frac{\delta}{h} \qquad (1)$$

1) Spänningen

(3.3)

Plan töjning (3.7) funkar också!

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \\ \sigma_z = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right] \end{cases} \qquad (2)$$

(1) i (2)

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\delta E \nu}{h(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \sigma_y = \sigma_x \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)}\left[\frac{\delta}{h} + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\delta}{h}\right] = \frac{\delta E}{h(1+\nu)}\left[1 + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\right] = \frac{\delta E(1-\nu)}{h(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \qquad (3)$$

Inga skjuvspänningar

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_z \\ \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y. \end{cases}$$

2) Effektivspänningen

Von mises:

$$(3.30) \rightarrow \quad \sigma_e^{vm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2-(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{1/2}$$

$$\left\{\sigma_2 = \sigma_3 \ !\right\} \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\,(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]^{1/2} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\left\{(3)\right\} = \frac{\delta E(1-\nu)}{h(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\delta E \nu}{h(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\delta E\cancel{(1-2\nu)}}{h(1+\nu)\cancel{(1-2\nu)}} = \frac{\delta E}{h(1+\nu)}$$

Tresca:

$$(3.32) \quad \sigma_e^{T} = \max\left(|\sigma_1-\sigma_3|\right) = \left|\frac{\delta E}{h(1+\nu)}\right| = \frac{\delta E}{h(1+\nu)}$$

3) Begynnande plasticering om $\sigma_e = \sigma_s$

$$\sigma_e^{vm} = \sigma_e^{T} \quad !$$

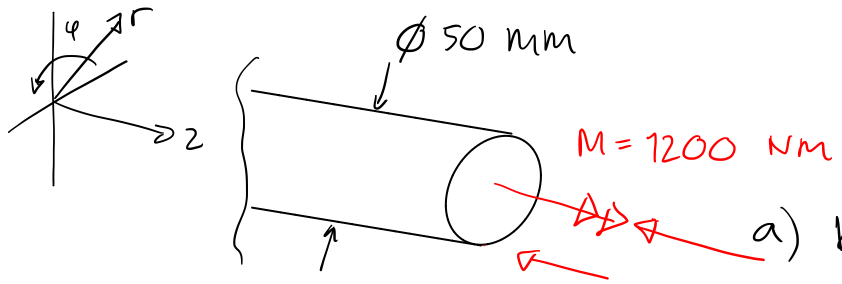
$$\rightarrow \quad \sigma_s = \frac{\delta_s E}{h(1+\nu)} \quad \rightarrow \quad \delta_s = \frac{\sigma_s h(1+\nu)}{E}$$

SVAR Begynnande plasticering då

$$\delta_s = \frac{\sigma_s h(1+\nu)}{E}$$

för både tresca & vm.

2.11.16 En axel av SS-1650 utsätts för ett moment och en kraft. bestäm storleken på kraften för att plastisk deformation ska uppkomma mha VM.



a) kraften verkar centralt

b) kraften angriper vid randen.

1) Materialdata.

f.s s.386 141650-1 $\rightarrow \begin{cases} E = 206 \text{ GPa} \\ \sigma_s = R_{p0,2} = 310 \text{ MPa} \end{cases}$

2) Superponera (lägg ihop) spänningarna från de olika lastfallen

Momentet:

Bryr oss eg. bara om beloppet!

(6.76) $\rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{M_v}{W_v}$ ← snittmoment = yttre moment

(6.78) $\rightarrow \quad W_v = \frac{\pi}{16D}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^3}{16}$

$$\rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{16M}{\pi D^3} \qquad (1)$$

Normalkraften:

böjande moment!

(6.7) $\rightarrow \quad \sigma_{max} = -\frac{N}{A} + \frac{M(x)}{I(x)} \cdot z$

(Tabell 30.1.3) $\rightarrow \quad I_y = \frac{\pi a^4}{4}$

Tecknet varierar beroende på z!

a) $\rightarrow \quad \sigma^a_{max} = -\frac{P}{a}$

b) $\rightarrow \quad \sigma^b_{max} = -\frac{P}{A} - \frac{4}{\pi a^4} \cdot P \cdot a \cdot a = -\frac{P}{A} - \frac{4P}{\pi a^2} = -\frac{5P}{A}$

Totala spänningen

$$S^a = S^a_{MOMENT} + S^a_{NORMAL} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ sym & - & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16M/(\pi D^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P/A \end{bmatrix}$$

$$S'^{b} = S'^{b}_{MOMENT} + S'^{b}_{NORMAL} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ | & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ sym & - & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16M/(\pi D^3) & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & -\frac{5P}{A} \end{bmatrix}$$

3.) Begynnande plasticering, då $\sigma_e^{vM} = \sigma_s \quad (*)$

a) $(3.30) \rightarrow \sigma_e^{vM,a} = \left[\left(\frac{P}{A}\right)^2 + 3\left(16M/\pi D^3\right)^2\right]^{1/2}$

$(*) \rightarrow \sigma_s^2 = \frac{P_{s,a}^2}{A^2} + 3\left(\frac{16M}{\pi D^3}\right)^2$

Skippade tecknet...

$\rightarrow P_{s,a} = \left[\sigma_s^2 - 3\left(\frac{16M}{\pi D^3}\right)^2\right]^{1/2} A = \{\text{VÄRDEN!}\} = 585 \text{ kN}$

b)

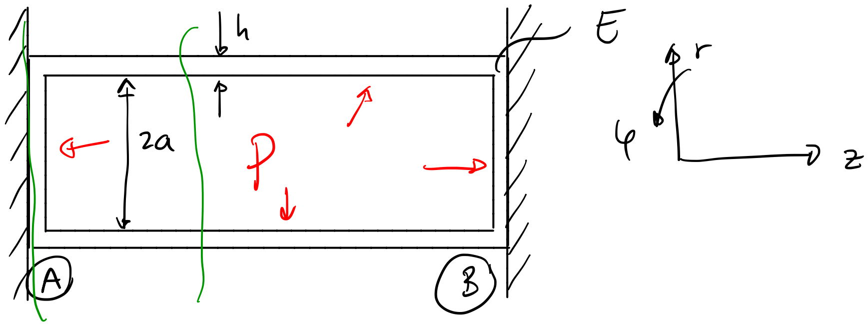
$(3.30) \rightarrow \sigma_e^{vM,b} = \left[P^2\left(\frac{5}{A}\right)^2 + 3\left(16M/\pi D^3\right)^2\right]^{1/2}$

$(*) \rightarrow \sigma_s^2 = P_{s,b}^2\left(\frac{5}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{16M}{\pi D^3}\right)^2$

$\rightarrow P_{s,b} = \left[\sigma_s^2 - 3\left(\frac{16M}{\pi D^3}\right)^2\right]^{1/2} \frac{A}{5} = 117 \text{ kN}$

(121 i FACIT ?!)

2.9.1 Tunnväggigt rör.

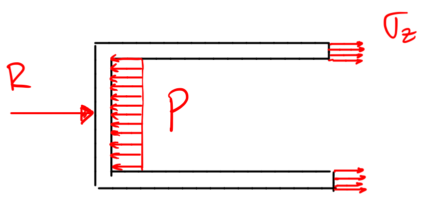


Beräkna: reaktionskrafterna vid A & B samt huvudspänningar

1) Ångpanne formlerna

$$(7.31) \rightarrow \begin{cases} \sigma_r \approx 0 \\ \sigma_\varphi = pa/h \\ \sigma_z = \sigma_z(p, R) \end{cases} \quad (1)$$

2) Snitta



JMV

$$\rightarrow: \sigma_z \cdot 2\pi a h - p \cdot \pi a^2 + R = 0$$

Statiskt obestämt!

$$\Leftrightarrow \quad R = p\pi a^2 - \sigma_z \cdot 2\pi a h \quad (2)$$

3) kompatibilitet.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{Homogen!})$$

$$(3.1) \rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right]$$

$$\underset{(1)}{\{\varepsilon_z = 0\}} \rightarrow \quad \sigma_z = \nu \sigma_\varphi \quad (3)$$

Insatt i (2)

$$R = p\pi a^2 - \nu\left(\frac{pa}{\cancel{h}}\right) \cdot 2\pi a \cancel{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad R = p\pi a^2(1 - 2\nu) \quad (4)$$

4) Huvudspänningar.

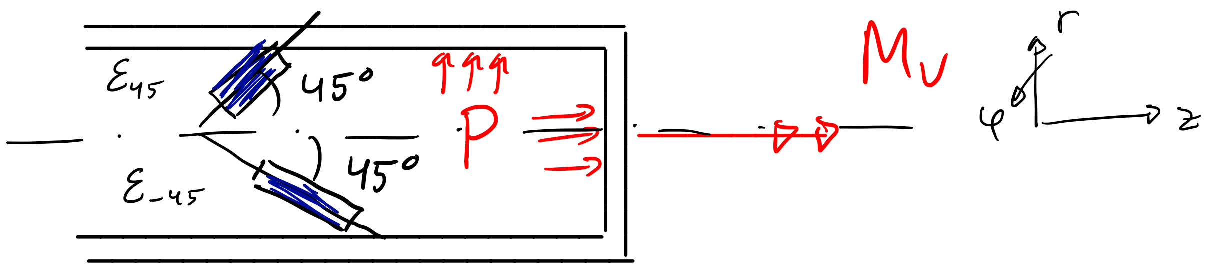
– Alla skjuvspänningar är noll !

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h} \\ \sigma_2 = \sigma_z = \dfrac{pa}{2h} \\ \sigma_3 = \sigma_r = 0 \end{cases}$$

SVAR

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h} \\ \sigma_2 = \sigma_z = \dfrac{pa}{2h} \\ \sigma_3 = \sigma_r = 0 \end{cases} \quad \& \quad R = p\pi a^2 (1 - 2\nu)$$

2.9.6 Tryckkärl med töjningsgivare.



Givet:

$$\begin{cases} d = 50 \text{ mm} \\ h = 2 \text{ mm} \\ \varepsilon_{45} = 5 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{-45} = -2 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

$E = 200$ GPa

$\nu = 0,3$

Bestäm: Storlek på p & M_v.

Plan

1) Ta fram superponerade spänningstillståndet.
2) Hookes lag $\to \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z$.
3) Använd (2.21) för att jämföra med ε_{45} & ε_{-45}

$$\varepsilon(\varphi) = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \gamma_{xy} \cos\varphi \sin\varphi$$

---

1) Spänningen från övertrycket, ångpanneformlerna

$$(7.31) \to \begin{cases} \sigma_r \approx 0 \\ \sigma_\varphi = pa/h \\ \sigma_z = pa/2h \end{cases} \qquad (1)$$

Spänning från momentet

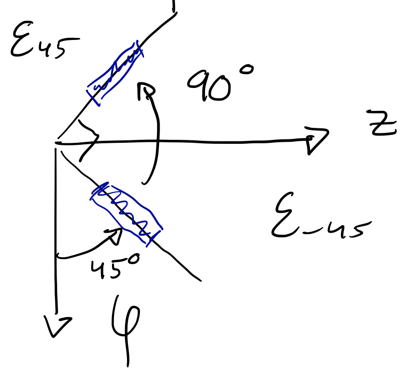
$$(6.76) \to \tau_{\varphi z} = \frac{M_v}{W_v}, \quad W_v = 2\pi^2 a h$$

$$\to \tau_{\varphi z} = \frac{pa}{2Eh}(1-2\nu) \qquad (2)$$

2) Hookes (Allmänna med $\sigma_r = 0$)

$$(3.1) \rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_r = \ldots) \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left[\sigma_\varphi - \nu \sigma_z\right] = \frac{pa}{2Eh}(1-2\nu) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu \sigma_\varphi\right] = \frac{pa}{2Eh}(2-\nu) \\ \gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G} = \left\{ \overset{(3.2)}{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \right\} = \frac{M_v(1+\nu)}{E\pi a^2 h} \end{cases} \quad (3)$$

3. Rotationsformeln



$$\longrightarrow \begin{cases} \varepsilon_{-45} = \varepsilon(45°) = \varepsilon_\varphi \cdot \frac{1}{2} + \varepsilon_z \cdot \frac{1}{2} + \gamma_{\varphi z} \cdot \frac{1}{2} & (*) \\ \varepsilon_{45} = \varepsilon(135°) = \varepsilon_\varphi \frac{1}{2} + \varepsilon_z \cdot \frac{1}{2} - \gamma_{\varphi z} \cdot \frac{1}{2} & (**) \end{cases}$$

Lös systemet

$(*) + (**) \Rightarrow \quad \varepsilon_{45} + \varepsilon_{-45} = \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$

Insättning av (3)

$$\rightarrow \varepsilon_{45} + \varepsilon_{-45} = \frac{3pa}{2Eh}(1-\nu)$$

$$\rightarrow p = \frac{2}{3} \frac{Eh \cdot (\varepsilon_{45} + \varepsilon_{-45})}{a(1-\nu)} = \left\{ \text{VÄRDEN!} \right\} = 0{,}457 \text{ MPa}$$

Insatt i $(*)$

$$\varepsilon_{-45} = \frac{3}{4}\frac{pa}{Eh}(1-\nu) + \frac{1}{2}\frac{M_v(1+\nu)}{E\pi a^2 h}$$

Lös ut M_v

$$\rightarrow M_v = \ldots = -42{,}3 \text{ Nm}$$

$p = 0{,}457$ MPa

$M_v = -42{,}3$ Nm

SVAR