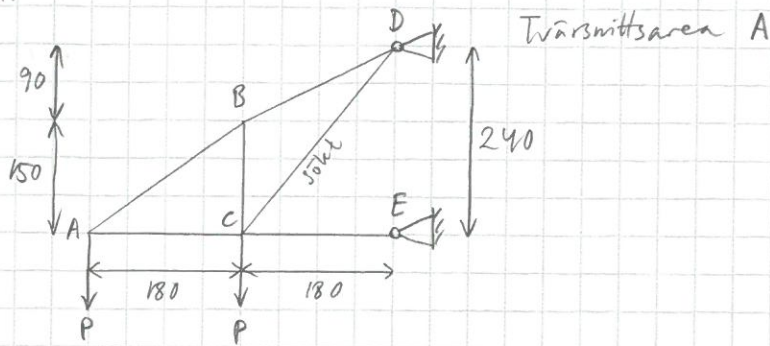


2.2.4.

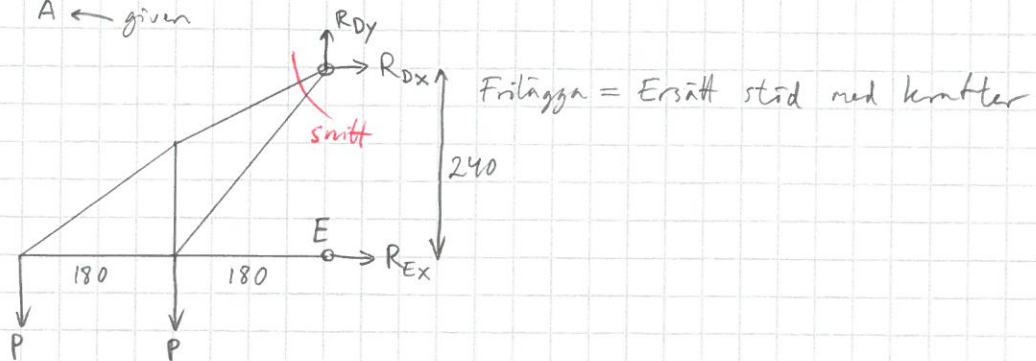


Sölet: σ_{CD}

Hur?: $\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A}$ ← given

① Frilägg + Jmv
② snitta + Jmv

Lösning: ①



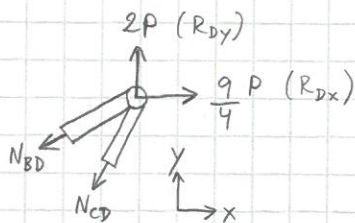
Jmv ↑: $R_{Dy} - P - P = 0 \Rightarrow R_{Dy} = 2P$

Jmv →: $R_{Dx} + R_{Ex} = 0 \Rightarrow R_{Ex} = -R_{Dx}$

Jmv (E): $240 R_{Dx} - 360P - 180P = 0 \Rightarrow R_{Dx} = \frac{540P}{240} = \frac{9}{4}P \Rightarrow R_{Ex} = -\frac{9}{4}P$

② Vill ha N_{CD} , så stäng CD näste snittas.

Tips: Det brukar vara smidigast vid snitt av lastverk att välja en knutpunkt och snitta av alla stänger som går dit. Vill vi få med CD så behöver vi alltså snitta runt C eller D. D är enklast nu, färre okända.



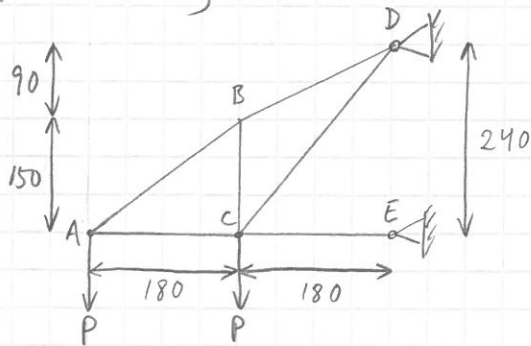
Enhetsvektorer för N_{BD} , N_{CD} :

$\vec{N}_{BD} = \frac{(-180, -90)}{\sqrt{180^2 + 90^2}} \cdot N_{BD} = \frac{(-2, -1)}{\sqrt{5}} N_{BD}$

$\vec{N}_{CD} = \frac{(-180, -240)}{\sqrt{180^2 + 240^2}} \cdot N_{CD} = \frac{(-3, -4)}{5} N_{CD}$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \text{Jmv } \uparrow: 2P + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) N_{BD} + \left(\frac{-3}{5}\right) N_{CD} &= 0 \\ \text{Jmv } \rightarrow: \frac{9}{4}P + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) N_{BD} + \left(\frac{-4}{5}\right) N_{CD} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Lös} \Rightarrow N_{BD} = \frac{3P}{\sqrt{5}}, N_{CD} = \frac{7P}{4} \Rightarrow \sigma_{CD} = \frac{7P}{4A}$$

2.2.4. Alt. lösning med vektorer och andra sidan av snittet runt D.

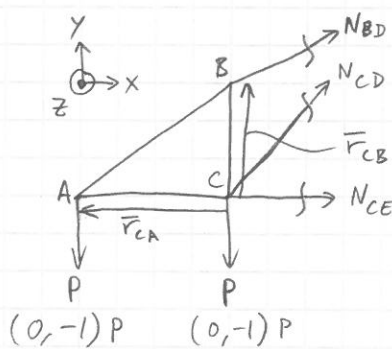


Tvårsnittsarea A

Sölet: σ_{CD}

Huv?: $\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A}$ ← givet

Smitta + jmv ← (Förlägg ≈ gör snitt i BD, CD och CE)



I vektorer: (enhets-) riktningsvektor
förenkla storleke (pos. = drag, neg. = tryck)

$$\bar{N}_{BD} = \frac{(180, 90)}{\sqrt{180^2 + 90^2}} N_{BD} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}} N_{BD}$$

$$\bar{N}_{CD} = \frac{(180, 240)}{\sqrt{180^2 + 240^2}} N_{CD} = \frac{(3, 4)}{5} N_{CD}$$

$$\bar{N}_{CE} = \frac{(180, 0)}{\sqrt{180^2 + 0^2}} N_{CE} = (1, 0) N_{CE}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} N_{BD} + \frac{3}{5} N_{CD} + 1 N_{CE} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} N_{BD} + 3 N_{CD} + 5 N_{CE} = 0 \quad (1)$$

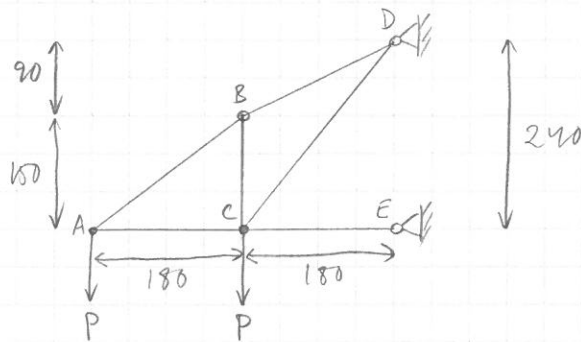
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} N_{BD} + \frac{4}{5} N_{CD} - P - P = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} N_{BD} + 4 N_{CD} = 10P \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &= \bar{r}_{CA} \times (0, -P, 0) + \bar{r}_{CB} \times \bar{N}_{BD} = \underbrace{180P \hat{e}_z}_{\text{Kraften vid A}} + \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 150 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Dvs. } (0, 0, 180P)} \cdot \frac{N_{BD}}{\sqrt{5}} = \\ &= 180P \hat{e}_z + \underbrace{\left(\frac{-300}{\sqrt{5}} \right)}_{-60\sqrt{5}} N_{BD} \hat{e}_z = (0, 0, 0) \Rightarrow \sqrt{5} N_{BD} = 3P \quad (3) \end{aligned}$$

$$(3) \text{ i } (2) \Rightarrow \underbrace{(3P)}_{\sqrt{5} N_{BD}} + 4 N_{CD} = 10P \Leftrightarrow N_{CD} = \frac{7P}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{CD} = \frac{7P}{4A}}}$$

2.2.4.

Alt. lösning som övningsboken föreslår, använder en "smart" punkt för momentjmv.

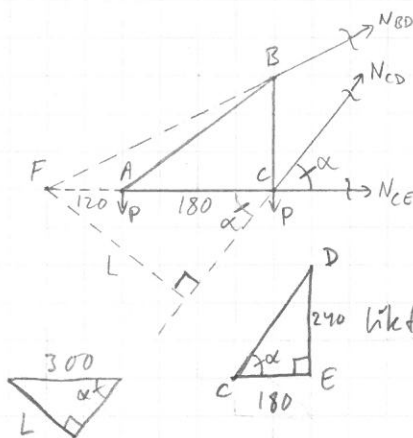


Sölet: σ_{CD}

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A} \leftarrow \text{snitta + jmv.} \leftarrow (\text{Fritaggen} \approx \text{gör snitt i BD, CD, CE})$$

$A \leftarrow \text{Känd}$

Snitta: (inrör en punkt så att N_{BD} och N_{CE} inte får hävarm.)



$$F: \text{Lutning på BD} = \frac{90}{180} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta X = 2 \Delta Y$$

$$F \text{ vid } \Delta Y = 150 \Rightarrow \Delta X = 300$$

$$\Rightarrow 120 \text{ vänster om A}$$

$$\text{Hypotenusan} = \sqrt{240^2 + 180^2} = 300 \Rightarrow \text{lika stort!}$$

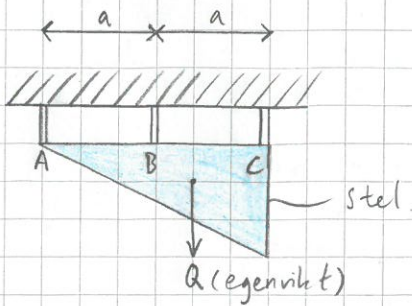
$$\Rightarrow L = 240$$

$$\text{Jmv } (F): 120P + 300P - 240N_{CD} = 0 \Leftrightarrow N_{CD} = \frac{420}{240}P = \frac{7}{4}P$$

Eftersom N_{BD} och N_{CE} inte har någon hävarm
så slipper man räkna med dem \Rightarrow behöver inte lösa elevationsystem.

Svar: $\sigma_{CD} = \frac{7}{4} \frac{P}{A}$

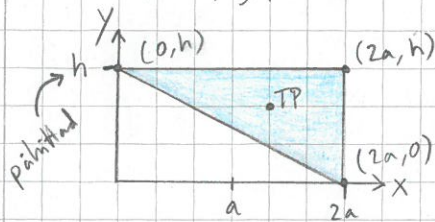
2.2.11.



Sökt: N_A, N_B, N_C

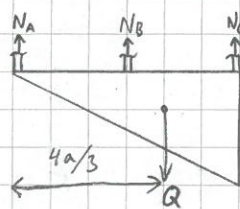
① Uppenbart problem: Var angriper Q ?

Tips: Tyngdpunkten av en triangel = medel av hörnens koordinater



$$\Rightarrow TP = \frac{(0, h) + (2a, h) + (2a, 0)}{3} = \frac{(4a, 2h)}{3}$$

② Snitta + Jmv.

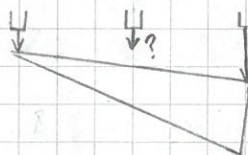


$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Jmv } \uparrow: N_A + N_B + N_C - Q = 0 \Leftrightarrow 1N_A + 1N_B + 1N_C = Q & (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Jmv } \curvearrowright A: N_B \cdot a + N_C \cdot 2a - Q \left(\frac{4a}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow 0N_A + 1N_B + 2N_C = \frac{4}{3}Q & (2) \end{cases}$$

Saknar en equation \Rightarrow Deformations samband!

③ Deformations samband (Kompatibilitet)



Triangeln är stel, så om man vet hur mycket A och C förlängs så vet man också hur B förlängs, samband finns!

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{\delta_A + \delta_C}{2} \Leftrightarrow \{ \epsilon_i \text{ konst. i stängerna} \} \Leftrightarrow \epsilon_B \Delta = \frac{\epsilon_A \Delta + \epsilon_C \Delta}{2} \Leftrightarrow \epsilon_A - 2\epsilon_B + \epsilon_C = 0$$

Töjning kan tolkas om till spänning eller kraft via ett materialsamband

④ Materialsamband (Konstitutiv lag)

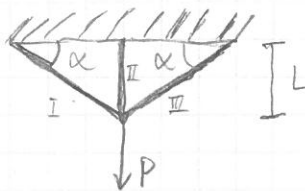
$$\text{Hookes lag} \Rightarrow \epsilon = \sigma / E \Rightarrow \epsilon = \frac{N}{EA} \Rightarrow \frac{N_A}{EA} - 2\frac{N_B}{EA} + \frac{N_C}{EA} = 0 \Leftrightarrow 1N_A - 2N_B + 1N_C = 0 \quad (3)$$

⑤ Lös systemet!

$$\begin{cases} 1N_A + 1N_B + 1N_C = Q \cdot 1 \\ 0N_A + 1N_B + 2N_C = Q \cdot 4/3 \\ 1N_A - 2N_B + 1N_C = Q \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

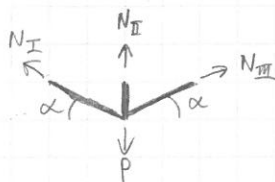
$$\Leftrightarrow \begin{cases} N_A = Q/6 \\ N_B = 2Q/6 \\ N_C = 3Q/6 \end{cases}$$

2.2.14



Sök: N_I, N_{II}, N_{III}

① Snitta + Jmv:



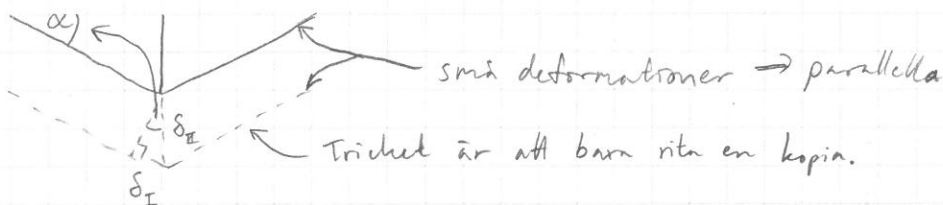
$$Jmv \rightarrow: \cos \alpha N_{III} - \cos \alpha N_I = 0 \Leftrightarrow N_I = N_{III} \quad \text{alt. från sym.}$$

$$\uparrow: \sin \alpha N_I + N_{II} + \sin \alpha N_{III} - P = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha N_I + N_{II} = P$$

(1)

② Deformations samband (Kompatibilitet)



$$(\delta_{III} = \delta_I \text{ pga symmetri})$$

$$\Rightarrow \delta_I = \sin \alpha \delta_{II} \Leftrightarrow N_I \frac{L_I}{EA} = \sin \alpha N_{II} \frac{L_{II}}{EA} \Leftrightarrow N_I = \sin \alpha \frac{L_{II}}{L_I} N_{II}$$

$$\text{Geometrin} \Rightarrow \frac{L_{II}}{L_I} = \sin \alpha \Rightarrow N_I = \sin^2 \alpha N_{II}$$

(2)

③ Lös systemet

$$(1) \text{ och } (2) \Rightarrow 2 \sin^3 \alpha N_{II} + N_{II} = P \Leftrightarrow N_{II} = \frac{P}{1 + 2 \sin^3 \alpha}$$

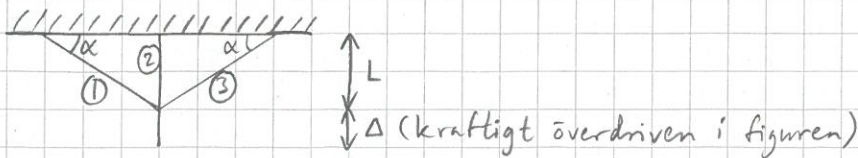
(3)

$$(3) \text{ och } (2) \Rightarrow N_I = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin^3 \alpha} P$$

$$\text{Svar: } N_I = N_{III} = P \left(\frac{\sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin^3 \alpha} \right)$$

$$N_{II} = P \left(\frac{1}{1 + 2 \sin^3 \alpha} \right)$$

2.2.15.



$$\Delta \ll L \text{ (så att } L_2 \approx L)$$

Stång 1 och 3 dras ner och fästs vid stång 2:s ände. Därefter återfjädRAR systemet upp till jämvikt.

Sökt: N_1, N_2, N_3 efter återfjädRING

① Snitt + Jmv \Rightarrow

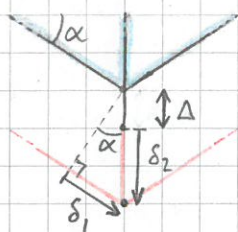
$$\Rightarrow N_3 \cos \alpha - N_1 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow N_1 = N_3 \text{ (alt. pga. symmetri)}$$

$$\uparrow: N_1 \sin \alpha + N_2 + N_3 \sin \alpha = 2 N_1 \sin \alpha + N_2 = 0 \quad (1)$$

\Rightarrow 2 okända, 1 elev. \Rightarrow behöver deformations samband!

② Deformations samband (Kompatibilitet)

Symmetri $\Rightarrow \delta_1 = \delta_3 \Rightarrow$ behöver ett samband mellan δ_1 och δ_2



(Innan deformation, kraftigt inzoomat vid knutpunkten)

(Efter deformation, vid jämvikt)

Notera att ändarna på stängerna startar från olika punkter, men om stängerna sitter ihop efter återfjädRING så måste slutpunkten vara gemensam! Rita en figur så att du ser hur stängerna måste förlängas för att kunna sitta ihop. Slutpunkten kan ritas precis var som helst.

$$\Rightarrow \delta_1 = (\Delta + \delta_2) \sin \alpha \Rightarrow \frac{\delta_1}{\Delta + \delta_2} = \sin \alpha \Leftrightarrow \delta_1 = (\Delta + \delta_2) \sin \alpha$$

③ Hooks lag (Konstitutiv lag) \Rightarrow översätt $\delta \rightarrow$ kraft

$$\delta_i = \{ \epsilon_i \text{ konstanta inom stängerna} \} = \epsilon_i L_i = \frac{\sigma_i L_i}{E} = \frac{N_i L_i}{EA}$$

$L_1 = L / \sin \alpha \quad L_2 = L$

$$\Rightarrow \frac{N_1 L_1}{EA} = \left(\Delta + \frac{N_2 L_2}{EA} \right) \sin \alpha \Rightarrow N_1 \left(\frac{L}{\sin \alpha} \right) = \left[\Delta EA + N_2(L) \right] \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_1 = \left(\frac{\Delta EA}{L} + N_2 \right) \sin^2 \alpha$$

(2)

2.2.15.

(Fortsättning)

④ Lös ekvationssystemet:

$$(1) \quad 2 \sin \alpha N_1 + N_2 = 0$$

$$(2) \quad N_1 = \left(\frac{\Delta EA + N_2}{L} \right) \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha \left[\frac{\Delta EA + N_2}{L} \sin^2 \alpha \right] + N_2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^3 \alpha \frac{\Delta EA}{L} + 2 \sin^3 \alpha N_2 + N_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_2 = \frac{-2 \sin^3 \alpha}{1 + 2 \sin^3 \alpha} \frac{\Delta EA}{L}$$

$$(1) \Rightarrow 2 \sin \alpha N_1 = -N_2 \Leftrightarrow N_1 = -\frac{1}{2 \sin \alpha} N_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N_1 = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + 2 \sin^3 \alpha} \frac{\Delta EA}{L}$$

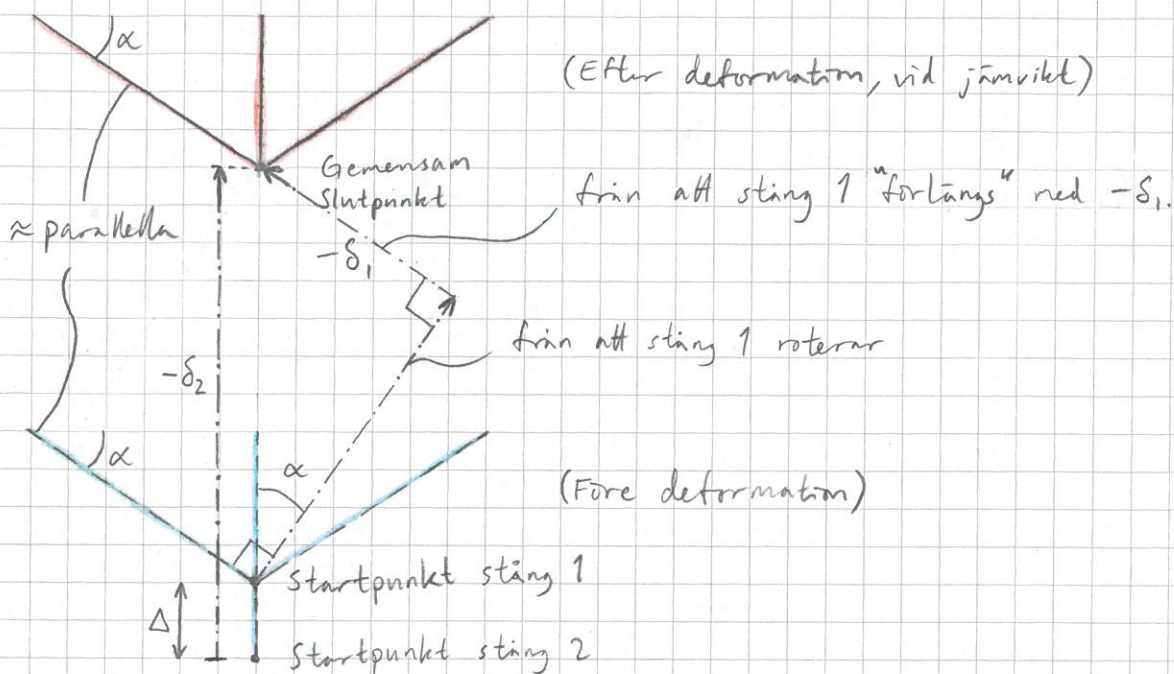
Notera tecknen på N_1 och N_2 ! Om stång 2 var för lång från början ($\Delta > 0$), så blir N_2 negativ, dvs. ligger i tryck, och stång 1 och 3 hamnar i drag.

Om stång 2 hade varit Δ för kort istället ($\Delta < 0$) så skulle stång 1 och 3 behöva dra ut stång 2 istället, 1 och 3 skulle hamna i tryck, och 2 skulle hamna i drag.

2.2.15. (Extra)

Exempel på om man ritat deformationen på ett annat sätt.

Om man gör rätt ska deformationssambandet fortfarande bli densamma.

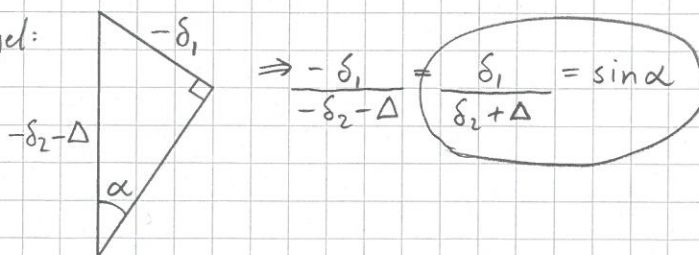


Stång 1:s förflyttning har delats upp i 2 komponenter, en del från att den roterar, en del från att stången "förlängs" med $-\delta_1$ (dvs. förkortas).

Stång 2 behöver "förlängas" med $-\delta_2$ för att nå slutpunkten.

Vi envisas med att använda negativa förlängningar för att det passar till formeln.

Figuren ovan ger en viktig triangel:



Notera att det är samma deformationssamband som det andra sättet, där vi antog att deformationen går neråt. Kom bara ihåg att ta med ett minustecken om man ritat en förkortning.