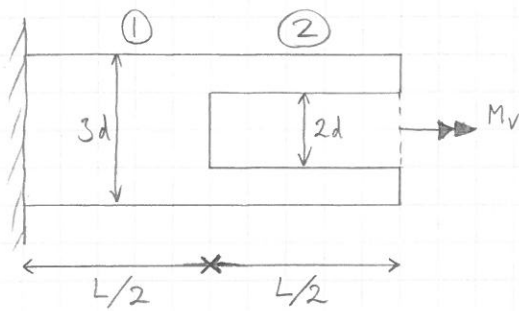


2, 6, 7.



Sökt: Förvridning θ

Tips: " $\delta = \frac{NL}{EA}$ " jmf. " $\theta = \frac{M_v L}{GK}$ " ← F.S. 6.75. s. 75
(6.74 s. 73 i gamla bki)
om ε konst om ϑ konst

ϑ konstant inom del 1, och 2, men måste delas upp →

$$\Rightarrow \theta = \frac{M_{v1} L_1}{G_1 K_1} + \frac{M_{v2} L_2}{G_2 K_2} \quad \left(\text{jämte } \delta = \frac{N_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2 L_2}{E_2 A_2} \right) \quad (1)$$

$$L_1 = L_2 = L/2$$

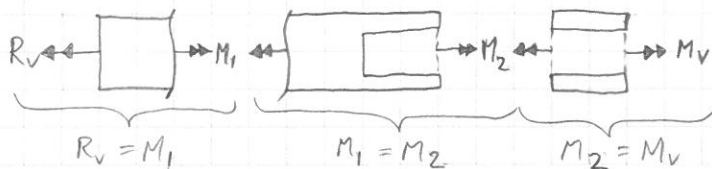
samma material $\Rightarrow G_1 = G_2 = G$
(6.76 sid 73 i gamla bki)

K_i från F.S. 6.77. sid 75.

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\pi}{32} [(3d)^4 - 0] = \frac{81\pi}{32} d^4$$

$$K_2 = \frac{\pi}{32} [(3d)^4 - (2d)^4] = \frac{\pi}{32} (81 - 16) d^4 = \frac{65\pi}{32} d^4$$

Frlägg + Snitt för att finna M_1 och M_2 .



$$R_v = M_1$$

$$M_1 = M_2$$

$$M_2 = M_v$$

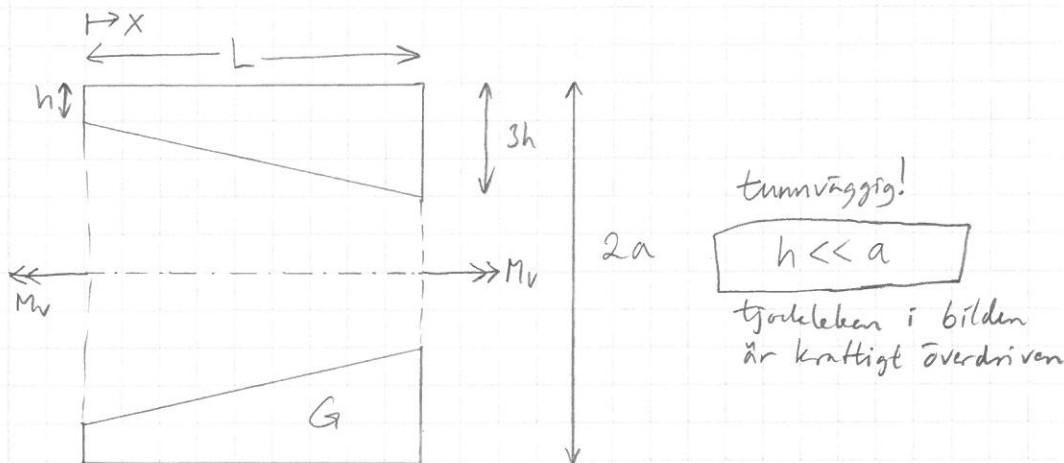
$$\Rightarrow M_1 = M_2 = M_v$$

(3)

Allt känt nu! Sätt in (2) och (3) i (1)

$$\Rightarrow \theta = \frac{M_v (L/2)}{G \frac{81\pi}{32} d^4} + \frac{M_v (L/2)}{G \frac{65\pi}{32} d^4} = \frac{M_v L}{G \pi d^4} \left(\frac{32}{2 \cdot 81} + \frac{32}{2 \cdot 65} \right) \approx 0,44 \frac{M_v L}{G \pi d^4}$$

2.6.12.



Sökt: Förvridning θ

Hur: Dela upp röret i tunna skivor med längd dx



i en tunn skiva är ϑ nästan nog konstant.

$$\Rightarrow \text{kan använda } \theta = \frac{M_v L}{G K} \Rightarrow d\theta = \frac{M_v dx}{G K(x)} \quad \text{F.S. 6.75 s. 75 (6.74 s. 73 i gamla blå)}$$

$$\theta_{\text{tot}} = d\theta_1 + d\theta_2 + \dots = \int_0^L \frac{M_v}{G K(x)} dx = \int_0^L \vartheta(x) dx \quad \left(\text{jämför med } \delta = \int_0^L \epsilon dx \right) \quad (1)$$

Lösning: $h \ll a, L = \text{tunnväggigt rör}$

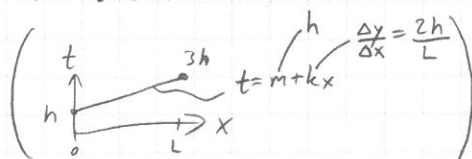
(6.79 s. 74 i gamla blå)

$$\Rightarrow K(x) = 2\pi a^3 t \quad \leftarrow \text{tjocklek}$$

F.S. 6.80. s. 76

(2)

$$t = h + \frac{2h}{L} x = h \left(1 + \frac{2x}{L} \right)$$



(3)

$$(2) \text{ och } (3) \Rightarrow 2\pi a^3 h \left(1 + \frac{2x}{L} \right) = \frac{2\pi a^3 h (L + 2x)}{L} = K(x)$$

(4)

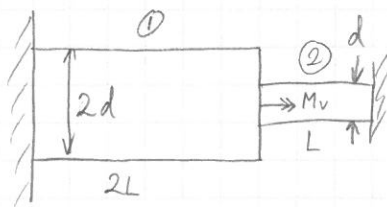
$$\theta_{\text{tot}} = \int_0^L \frac{M_v L}{2\pi a^3 h (L + 2x)} dx = \frac{M_v L}{2\pi a^3 h} \int_0^L \frac{1}{L + 2x} dx$$

$$\left. \begin{aligned} y = L + 2x &\Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dy \\ x = 0 &\Rightarrow y = L \\ x = L &\Rightarrow y = 3L \end{aligned} \right\} \text{variabelsubst.}$$

$$\Rightarrow \int_0^L \frac{1}{L + 2x} dx = \frac{1}{2} \int_L^{3L} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} [\ln y]_L^{3L} = \frac{1}{2} (\ln 3L - \ln L) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3L}{L} \right) = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{tot}} = \frac{M_v L}{4\pi a^3 h} \ln 3$$

2.6.14.



G, τ_{till}
↑ tillåten

Sökt: Största M_v så att $|\tau_{max}| = \tau_{till}$

Hur?: $|\tau_{max}| = \tau_{till}$

(6.78 s. 73 i gamla blå)
F.S. 6.79 s. 75

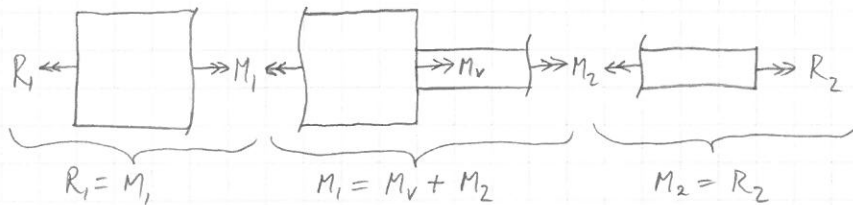
$\tau = G \vartheta r$ Frilägg, snitta, jämv. ...

$\vartheta = \frac{\theta}{L} = \frac{M}{GK}$ F.S. 6.75 s. 75
(6.74 s. 73 i gamla blå)

$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$ F.S. 6.77 s. 75

(0)

Lösning: Frilägg + snitta + jämv.



$$M_1 = M_v + M_2 \quad (1)$$

Jämvikt ränder inte \Rightarrow Deformations samband

$$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow \frac{M_1 L_1}{G K_1} + \frac{M_2 L_2}{G K_2} = 0 \leftarrow \text{väggen håller emot}$$

$$K_1 = \frac{\pi}{32} [(2d)^4 - (0)^4] = \frac{16\pi d^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2}$$

$$K_2 = \frac{\pi}{32} [(d)^4 - (0)^4] = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{M_1 (2L)}{\frac{\pi d^4}{2}} + \frac{M_2 L}{\frac{\pi d^4}{32}} = 0 \Rightarrow 4M_1 + 32M_2 = 0 \Rightarrow M_1 = -8M_2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ och } (2) \Rightarrow -8M_2 = M_v + M_2 \Rightarrow M_2 = -\frac{M_v}{9} \Rightarrow M_1 = \frac{8}{9} M_v$$

$$(0) \Rightarrow \tau_i = G \vartheta_i r_i = \frac{M_i r_i}{K_i} \Rightarrow |\tau_{max,1}| = \frac{|M_1|}{K_1} r_1 = \frac{8}{9} \frac{M_v}{\frac{\pi d^4}{2}} \frac{d}{2} = \frac{16}{9} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$|\tau_{max,2}| = \frac{|M_2|}{K_2} r_2 = \frac{1}{9} \frac{M_v}{\frac{\pi d^4}{32}} \frac{d}{2} = \frac{16}{9} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\Rightarrow \text{Samma!} \Rightarrow \tau = \tau_{till} = \frac{16}{9} \frac{M_{v,max}}{\pi d^3} \Rightarrow M_{v,max} = \frac{9}{16} \pi d^3 \tau_{till} \quad (\text{båda går sönder samtidigt})$$

2.6.14.
(extra)

Ta reda på varför båda delar nådde τ_{till} samtidigt genom allmänt fall

$$\tau_1(r) = \frac{M_1 r}{K_1} \Rightarrow \tau_{1,\text{max}} = \frac{M_1 D_1}{K_1 \frac{D_1}{2}} \quad \text{Diameter i cylinder 1}$$

↑
Koordinat, inte cylinderns radie

$$K_1 = \frac{\pi D_1^4}{32} \Rightarrow \tau_{1,\text{max}} = \frac{M_1}{\frac{\pi D_1^4}{32}} \frac{D_1}{2} = \frac{16}{\pi} \frac{M_1}{D_1^3} \quad (a)$$

$$\text{På samma sätt} \Rightarrow \tau_{2,\text{max}} = \frac{16}{\pi} \frac{M_2}{D_2^3} \quad (b)$$

$$\text{Jämvikt ger } M_1 = M_v + M_2 \quad (1)$$

$$\text{Komp. + Konst. lag} \Rightarrow \frac{M_1 L_1}{K_1} + \frac{M_2 L_2}{K_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 M_1}{K_1} = - \frac{M_2}{K_2} \Leftrightarrow \frac{2 M_1}{D_1^4} = - \frac{M_2}{D_2^4} \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \frac{2(M_v + M_2)}{D_1^4} = - \frac{M_2}{D_2^4} \Leftrightarrow 2D_2^4 M_v + 2D_2^4 M_2 = -D_1^4 M_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2D_2^4 M_v = -D_1^4 M_2 - 2D_2^4 M_2 = -M_2 (D_1^4 + 2D_2^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2 = - \frac{2D_2^4}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v \quad (3)$$

$$(3) \wedge (1) \Rightarrow M_1 = M_2 + M_v = M_v \left(1 - \frac{2D_2^4}{D_1^4 + 2D_2^4} \right) = M_v \left(\frac{D_1^4 + 2D_2^4 - 2D_2^4}{D_1^4 + 2D_2^4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_1 = \frac{D_1^4}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v \quad (4)$$

$$\Rightarrow \tau_{1,\text{max}} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{D_1^3} \frac{D_1^4}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v = \frac{16}{\pi} \frac{D_1}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v$$

$$\Rightarrow \tau_{2,\text{max}} = \frac{16}{\pi} \frac{1}{D_2^3} \frac{(-2D_2^4)}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v = - \frac{16}{\pi} \frac{2D_2}{D_1^4 + 2D_2^4} M_v$$

↑
Samma konstant (utan tecken)

↑
Samma nämnare

↑
Samma M_v

inte identiska!

Slutsats: Båda delar når $\pm \tau_{\text{till}}$ samtidigt om och endast om $D_1 = 2D_2$.

Med andra ord, det var ren slump, eller helt avsiktligt, men inte allmänt!