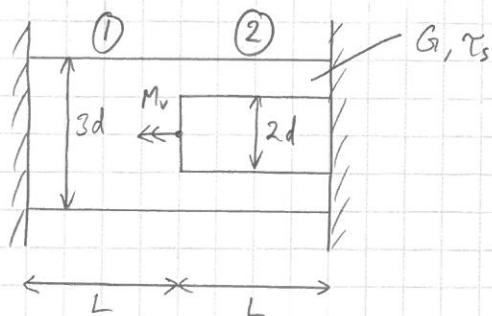


2. 6. 15.



Sölet: M_s , moment som ger begynnande plastisering

Hur? Störst $|\tau| = \tau_s$

Behöver $\tau_{1,max}$
 $\tau_{2,max}$

$$\tau = G\theta r = G\frac{\theta}{L}r \quad \text{F.S. 6.79 s. 75}$$

$$\theta = \frac{M_v L}{GK} \Rightarrow \tau = \frac{M_v r}{K} \quad \begin{array}{l} \text{Fritägg, snitt, Deformations samband vid behov} \\ \text{koordinat, välj} \\ \text{slä upp} \end{array}$$

F.S. 6.75 s. 75
(6.74 s. 73 i gamla bli)

Lösning: Fritägg:

$$R_1 \leftarrow \boxed{M_v} \rightarrow R_2 \quad \text{Jmv} \Rightarrow: R_2 - R_1 - M_v = 0 \Rightarrow R_2 = R_1 + M_v$$

Snitt: I del 1

$$R_1 \leftarrow \boxed{} \rightarrow M_1 \quad \text{Jmv} \Rightarrow: M_1 - R_1 = 0 \Rightarrow M_1 = R_1$$

I del 2

$$R_1 \leftarrow \boxed{M_v} \rightarrow M_2 \quad \text{Jmv} \Rightarrow: M_2 - R_1 - M_v = 0 \Rightarrow M_2 = R_1 + M_v \Rightarrow M_2 = M_1 + M_v \quad (1)$$

1 elev, 2 okända (M_1, M_2) \Rightarrow Deformations samband behövs!

Deformations samband: Stela väggar $\Rightarrow \theta = \theta_1 + \theta_2 = 0 \Leftrightarrow \theta_1 = -\theta_2$

Dvs. delarna kan vridas, men om del 1 vrids åt ett håll så måste del 2 vridas tillbaka så att höger ände inte glider mot väggen.

$$\theta_1 = -\theta_2 \Leftrightarrow \frac{M_1 K}{G K_1} = -\frac{M_2 K}{G K_2} \Leftrightarrow M_1 = -M_2 \frac{K_1}{K_2} \Rightarrow \text{Behöver } K_1, K_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{F.S. 6.77 s. 75} \\ (6.76 s. 73 i gamla bli) \end{array} \right\} \Rightarrow K_1 = \frac{\pi}{32} [(3d)^4 - 0^4] = \frac{81\pi d^4}{32}$$

$$K_2 = \frac{\pi}{32} [(3d)^4 - (2d)^4] = \frac{65\pi d^4}{32} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{81}{65}$$

$$\Rightarrow M_1 = -\frac{81}{65} M_2$$

(2)

$$2.6.15. \quad (2) \text{ i } (1) \Rightarrow M_2 = M_1 + M_v = -\frac{81}{65} M_2 + M_v \Leftrightarrow \frac{146}{65} M_2 = M_v \Leftrightarrow M_2 = \frac{65}{146} M_v$$

$$\Rightarrow M_1 = -\frac{81}{65} M_2 = -\frac{81}{65} \frac{65}{146} M_v = -\frac{81}{146} M_v$$

$\tau = \frac{M_v r}{K}$ ← r ← Större ger högre spänning, välj största för att få τ_{\max}
 ← K ← Kända

→ $r_{\max} = \frac{3d}{2}$ i både ① och ②

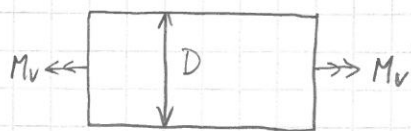
$$\tau_{1,\max} = \frac{M_1 r_{\max}}{K_1} = \frac{\left(-\frac{81}{146} M_v\right) \cdot \left(\frac{3}{2} d\right)}{\left(\frac{81 \pi d^4}{32}\right)} = -\frac{24}{73} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\tau_{2,\max} = \frac{M_2 r_{\max}}{K_2} = \frac{\left(\frac{65}{146} M_v\right) \cdot \left(\frac{3}{2} d\right)}{\left(\frac{65 \pi d^4}{32}\right)} = \frac{24}{73} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

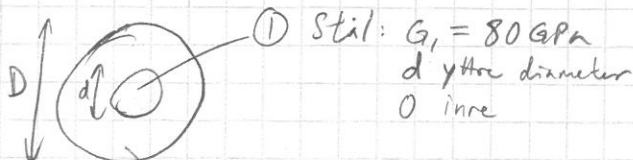
Lika stora i belopp!
 \Rightarrow Lika kritiska, båda plastiserar samtidigt.

$$\Rightarrow \tau_s = \frac{24}{73} \frac{M_s}{\pi d^3} \Leftrightarrow \underline{\underline{M_s = \frac{73}{24} \pi d^3 \tau_s}}$$

2.6.22.



$$d = 30 \text{ mm}$$



① Stål: $G_1 = 80 \text{ GPa}$
 d yttre diameter
 D inre

② Mässing: $G_2 = 35 \text{ GPa}$
 D yttre diameter
 d inre

a) Sölet: Bestäm D så att båda delar bär lika moment

Hur? Krav: $M_1 = M_2 = \frac{M_v}{2}$

↑ Moment redan känt, men problemet inre last... prova det samb?

Lösning: Prova med deformationssamband

Delarna sitter fast i varandra $\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$

Dvs. om kärnan roterar 5° med sig så måste höjlet också göra det, annars glider de mot varandra.

$$\Rightarrow \frac{M_1 L_1}{G_1 K_1} = \frac{M_2 L_2}{G_2 K_2} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} M_1 = M_2 \\ L_1 = L_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{G_1 K_1} = \frac{1}{G_2 K_2} \Leftrightarrow G_1 K_1 = G_2 K_2$$

\Rightarrow Behöver K_1, K_2

$$K_1 = \frac{\pi d^4}{32}, \quad K_2 = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$G_1 K_1 = G_2 K_2 \Leftrightarrow G_1 \frac{\pi d^4}{32} = G_2 \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} \Leftrightarrow \frac{G_1}{G_2} d^4 + d^4 = D^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^4 = \left[d^4 \left(\frac{G_1}{G_2} + 1 \right) \right]^{1/4} \Rightarrow D = d \left(\frac{G_1}{G_2} + 1 \right)^{1/4} \approx 1,35 d \approx \underline{\underline{40,4 \text{ mm}}}$$

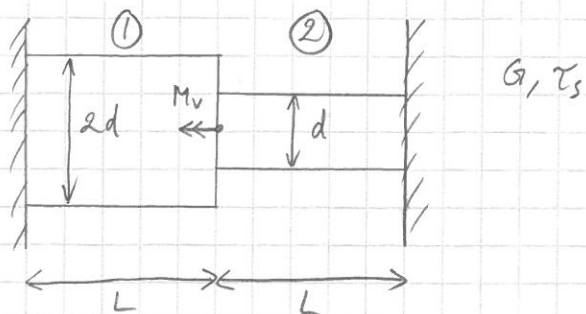
b) Sölet: Jämför $\tau_{1, \max}$ och $\tau_{2, \max}$

Hur? $\tau_{\max} = G \vartheta r_{\max} = G \left(\frac{\theta}{L} \right) r_{\max}$

↑ Samma för båda delar

$$\text{Lösning: } \frac{\tau_{1, \max}}{\tau_{2, \max}} = \frac{G_1 r_{1, \max}^{d/2}}{G_2 r_{2, \max}^{D/2}} = \frac{80 d}{35 D} = \frac{80 d}{35 \cdot 1,35 d} \approx \underline{\underline{1,7}}$$

2. 6. 29.



Sölet: $\frac{M_A}{M_S}$

Hur? Behöver M_S och M_A !

M_S : $\tau_{1,max}$, $\tau_{2,max}$, sätt största (till belopp) $= \tau_s$, lös ut M_v

$$\left. \begin{array}{l} \text{F.S. 6.79 s.75} \Rightarrow \tau = G \vartheta r = G \frac{\vartheta}{L} r \\ (6.78 \text{ s.73 i gamla}) \\ \text{F.S. 6.75 s.75} \Rightarrow \vartheta = \frac{M_v L}{G K} \\ (6.74 \text{ s.73 i gamla}) \end{array} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{M_v r}{K}$$

$$\Rightarrow \tau_{1,max} = \frac{M_1 r_{max}}{K_1} = \frac{M_1 d}{K_1}$$

$$\Rightarrow \tau_{2,max} = \frac{M_2 r_{max}}{K_2} = \frac{M_2 (d/2)}{K_2}$$

\Rightarrow Behöver K_1, K_2

Behöver M_1, M_2 ← snitta

Deformations samband

M_A : Allt har plastiserat ändra in till mitten

$$\text{F.S. 6.87 s.76} \Rightarrow M_{1f}, M_{2f} = \frac{2\pi \tau_s (b^3 - a^3)}{3}$$

(6.84 s.74 i texten)
i gamla blå

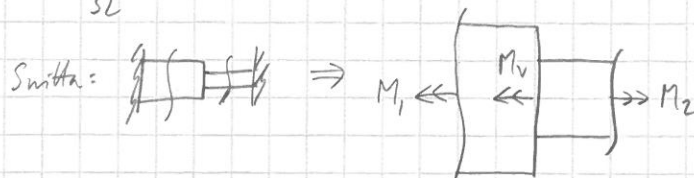
↑ yttre radie
↑ inre radie

Lösning:

$$K_1 = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{16\pi d^4}{32}$$

F.S. 6.77 s.75
(6.76 s.73 i gamla)

$$K_2 = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$\begin{aligned} \text{Jämv.} \Rightarrow M_2 - M_1 - M_v &= 0 \\ \Rightarrow M_2 &= M_1 + M_v \end{aligned}$$

(1)

Jämvikter slut \Rightarrow Def. samb. $\Rightarrow \vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{M_1 K}{G K_1} + \frac{M_2 K}{G K_2} = 0 \Leftrightarrow M_1 = -\frac{K_1}{K_2} M_2 = -16 M_2$$

(2)

$$2.6.29. (1) \text{ i } (2) \Rightarrow M_1 = -16(M_1 + M_v) \Leftrightarrow 17 M_1 = -16 M_v \Leftrightarrow M_1 = -\frac{16}{17} M_v$$

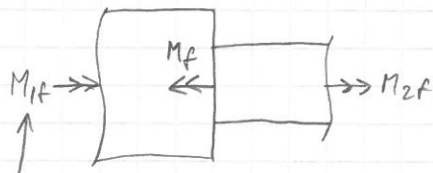
$$\Rightarrow \{2\} \Rightarrow M_1 = -\frac{16}{17} M_v = -16 M_2 \Leftrightarrow M_2 = \frac{1}{17} M_v$$

$$\Rightarrow \tau_{1, \max} = \frac{-16 M_v \cdot d}{17 \left(\frac{16 \pi d^4}{32} \right)} = \frac{-32}{17} \frac{M_v}{\pi d^3} \quad \leftarrow \text{Störst, plasticerar först}$$

$$\Rightarrow \tau_{2, \max} = \frac{1}{17} \frac{M_v (d/2)}{\left(\frac{\pi d^4}{32} \right)} = \frac{16}{17} \frac{M_v}{\pi d^3}$$

$$\Rightarrow \frac{32}{17} \frac{M_s}{\pi d^3} = \tau_s \Leftrightarrow M_s = \frac{17}{32} \pi d^3 \tau_s$$

För M_f :



När den plasticerar ska den vara i en riktning som motverkar M_v förstär

$$M_f = M_{1f} + M_{2f}$$

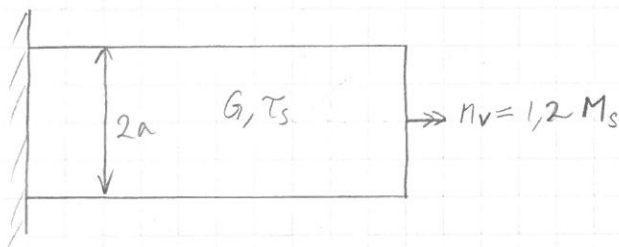
$$M_{1f} = \frac{2 \pi \tau_s}{3} (d^3 - 0^3) = \frac{2 \pi \tau_s d^3}{3}$$

$$M_{2f} = \frac{2 \pi \tau_s}{3} \left[(d/2)^3 - 0^3 \right] = \frac{\pi \tau_s d^3}{12}$$

$$\Rightarrow M_f = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{12} \right) \pi \tau_s d^3 = \frac{3 \pi \tau_s d^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{M_f}{M_s} = \frac{(3/4) \pi \tau_s d^3}{(17/32) \pi \tau_s d^3} = \frac{24}{17} \approx 1,4$$

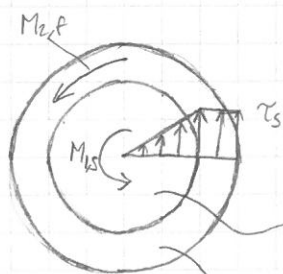
2.6.31.

a) Sölet: plasticeringsdjup

Hur?: Dela in cylindern i en mindre cylinder belastad till $\tau_s \leftarrow$ beter sig elast. och ett yttre rör som är fullplastiserat. \leftarrow beter sig plastiskt
Vridmomenten som dessa bär upp ska balansera $1,2 M_s$

Lösning:

$$M_v = 1,2 M_s = 1,2 \cdot \frac{(\pi \tau_s a^4)}{2a} = 0,6 \cdot \pi \tau_s a^3 \quad (1)$$



F.S. 6.86 s.76
(6.84 i texten i gamla bli)

① "cylinder" håller emot med " $M_{1,s}$ " \leftarrow begynnande plast.

② "rör" håller emot med " $M_{2,f}$ " \leftarrow fullplast.

okänd radie, lagom stor så att materialet totalt håller emot exakt M_v .

$$M_v = M_{1,s} + M_{2,f} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{F.S. 6.86} \Rightarrow M_{1,s} = \frac{\pi \tau_s r_s^4}{2 r_s} = \frac{\pi \tau_s r_s^3}{2} \\ \text{F.S. 6.87} \Rightarrow M_{2,f} = \frac{2 \pi \tau_s (a^3 - r_s^3)}{3} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$(1), (2) \text{ och } (3) \Rightarrow 0,6 \pi \tau_s a^3 = \underbrace{\frac{\pi \tau_s r_s^3}{2}}_{(M_{1,s})} + \underbrace{\frac{2 \pi \tau_s (a^3 - r_s^3)}{3}}_{(M_{2,f})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,6 a^3 = \frac{1}{2} r_s^3 - \frac{2}{3} r_s^3 + \frac{2}{3} a^3 \Leftrightarrow r_s^3 = \frac{2}{5} a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_s \approx 0,737 a$$

$$\text{Plasticeringsdjup} = \text{"rörets tjocklek"} = a - r_s \approx \underline{\underline{0,26 a}}$$

2.6.31.

b) Sökt: Kvarstående förvridning vid återfjädring, θ_{res}

Hur?: $0 \rightarrow \theta_i \rightarrow \theta_i + \Delta\theta$

↑
innan

↑
 θ_e
Efter = θ_{res}

← återfjädring

Elastisk avlastning \Rightarrow vanliga elastiska formler gäller

dvs. $\theta(M_v) \Rightarrow \Delta\theta(\Delta M_v) = \frac{\Delta M_v L}{G K_0}$ $\Delta M_v = -M_v \leftarrow$ res. pga avlastning

← Hela cylindern är elastisk under återfjädringen, så K_0 för hela cylindern med $D=2a$

Lösning: Behöver θ_i

$\theta_i = \frac{M_{i,s} L}{G K_i}$ ← gäller om allt är elastiskt, vilket ① är
Allt plastiskt ligger i röret, ②

$$M_i = M_{i,s} = \frac{\pi \tau_s r_s^3}{2}$$

$$K_i = \frac{\pi (2r_s)^4}{32} = \frac{\pi r_s^4}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_i = \frac{\pi \tau_s r_s^3}{2} \frac{L}{G \pi r_s^4} = \frac{\tau_s L}{G r_s} \approx 1,36 \cdot \frac{\tau_s L}{G a} \quad (4)$$

$$\Delta\theta = -\frac{M_v L}{G K_0} = -0,6 \frac{\pi \tau_s a^3 L}{G K_0}, \quad (\text{från } M_v = 0,6 \cdot \pi \tau_s a^3)$$

↑
negativt för att det är avlastning från $M_v \rightarrow 0$, $\Delta M_v = -M_v$

$$K_0 = \frac{\pi (2a)^4}{32} = \frac{\pi a^4}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = -\frac{0,6 \pi \tau_s a^3 L}{G \pi a^4} = -1,2 \frac{\tau_s L}{G a} \quad (5)$$

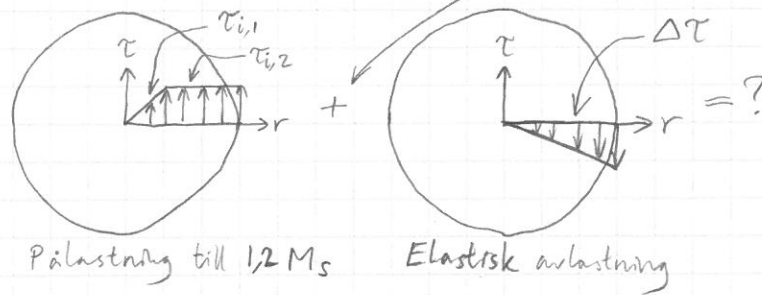
$$(4) \text{ och } (5) \Rightarrow \theta_{res} = \theta_i + \Delta\theta \approx 0,16 \frac{\tau_s L}{G a}$$

2.6.31.

c) Söket: restspänningstillståndet, $\tau(r)$

Superposition är helt ok eftersom steget här är elastiskt.

Hur?:



Lösning: Elastisk avlastning \Rightarrow elastiska formler de.

$$\Rightarrow \tau_{e,1} = \tau_{i,1} + \Delta\tau, \tau_{e,2} = \tau_{i,2} + \Delta\tau$$

(efter, del ①) \nearrow $\tau_{i,1} = G \frac{\theta_i}{L} r = \frac{G}{L} \left(\frac{\tau_s L}{G r_s} \right) r = \tau_s \frac{r}{r_s}$
(innan, del ①) \searrow

$$\Delta\tau = G \frac{\Delta\theta}{L} r = \frac{G}{L} \left(-1,2 \frac{\tau_s L}{G a} \right) r = -1,2 \tau_s \frac{r}{a} \leftarrow \text{gäller både del ① och ②}$$

$$\Rightarrow \text{inom } 0 \leq r < r_s: \tau(r) = \tau_s \frac{r}{r_s} - 1,2 \tau_s \frac{r}{a} = \tau_s r \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1,2}{a} \right)$$

(del ①)

$$\text{inom } r \geq r_s: \tau(r) = \tau_s \left(1 - 1,2 \frac{r}{a} \right)$$

(del ②)