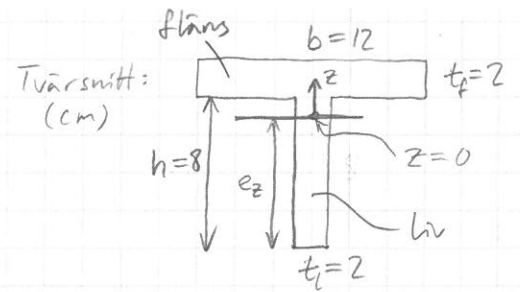
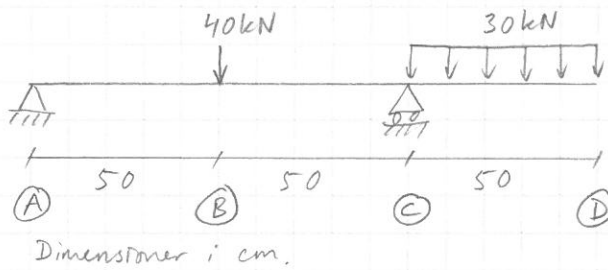


2.4.47.



Sölet: σ_{max} , σ_{min}
 \uparrow drag \uparrow tryck

$\frac{dM}{dx} = T(x) \leftarrow$ "gå mot pilen" \leftarrow förlägg
 $\Rightarrow T(x)$ -diagram

Huvr?: $\sigma(x, z) = \frac{M(x)}{I_y} \cdot z$

I_y \leftarrow Tjockväggig finns ej i F.S. $\leftarrow I_y = \int z^2 dA$ (F.S. s. 337, 30.3)

Lösning: Börja med att beräkna tyngdpunkters läge, e_z , dvs. var $z=0$

$\Rightarrow e_z = \frac{A_1 h_1 + A_2 h_2}{A_1 + A_2} = \frac{(12 \cdot 2) \cdot 9 + (8 \cdot 2) \cdot 4}{(12 \cdot 2) + (8 \cdot 2)} = 7 \text{ cm}$

viktat medelvärde

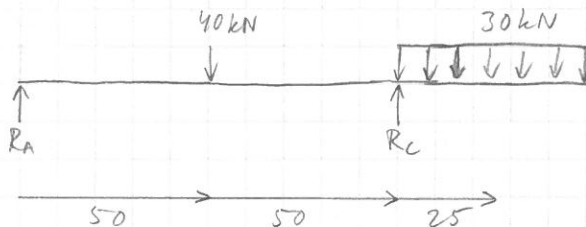
$\Rightarrow \begin{cases} z_{max} = 3 \text{ cm (topp)} \\ z_{min} = -7 \text{ cm (botten)} \end{cases}$

Steiners sats: s. 338

$I_y = \int z^2 dA_1 + \int z^2 dA_2 = 12 \cdot \int_{-7}^3 z^2 dz + 2 \cdot \int_{-7}^{-3} z^2 dz = \frac{1000}{3} [\text{cm}^4]$

$\uparrow 12 \text{ cm} \cdot dz$ $\uparrow 2 \text{ cm} \cdot dz$

Förlägg + huvr:

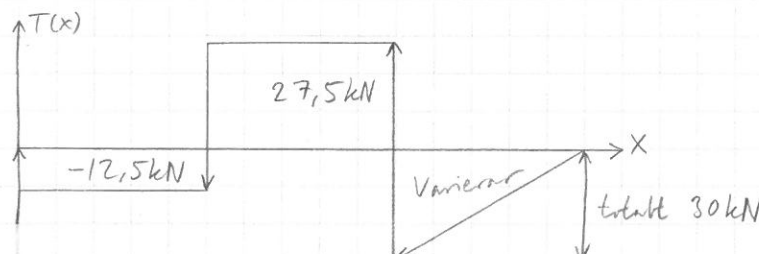
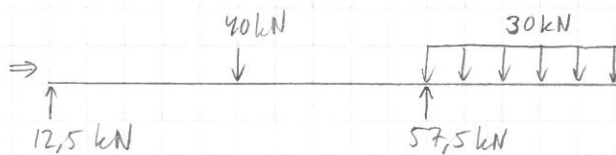


huvr \uparrow : $R_A + R_C = 70 \text{ kN}$

huvr $\curvearrowright A$: $100 R_C - 40 \cdot 50 - 30 \cdot 125 = 0$

$\Rightarrow R_C = 57,5 \text{ kN}$

$\Rightarrow R_A = 12,5 \text{ kN}$

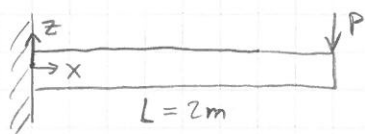


$\frac{dM}{dx} = T \Rightarrow$

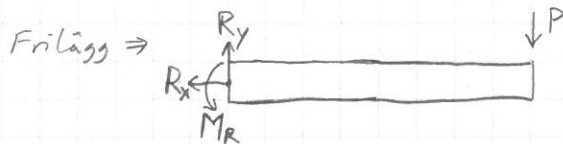
$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{topp} \approx 68 \text{ MPa} \\ \sigma_{botten} \approx 158 \text{ MPa} \end{cases} \leftarrow \text{största tryckspänning}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{topp} \approx -56 \text{ MPa} \\ \sigma_{botten} \approx 131 \text{ MPa} \end{cases} \leftarrow \text{största dragspänning}$

2.4.37.

Tvärsnitt $\odot I_d$ a) Sökt: d_{\min} om $P = 1500 \text{ N}$, $\sigma_{\text{till}} = 20 \text{ MPa}$ (trän)

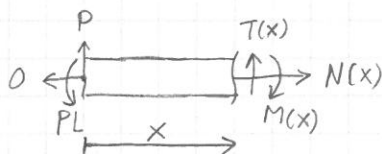
$$\text{Lösning: } \sigma(x, z) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M(x)}{I_y(x)} \cdot z = \{N=0\} = \frac{M(x)}{I_y(x)} z \quad (1)$$

Behöver $M(x) \Rightarrow$ frilägg, snitta

$$(\sum \rightarrow: R_x = 0)$$

$$\sum \uparrow: R_y = P$$

$$\sum \curvearrowright (x=0): M_R - PL = 0 \Leftrightarrow M_R = PL$$

Snitta \Rightarrow 

$$(\sum \rightarrow: N(x) = 0)$$

$$\sum \uparrow: P + T(x) = 0 \Leftrightarrow T(x) = -P$$

$$\sum \curvearrowright (x=0): PL + T(x) \cdot x - M(x) = 0 \Leftrightarrow M(x) = PL - Px = P(L-x) \quad (2)$$

Behöver $I_y(x) = I_y$ (konstant) \leftarrow (F.S. s. 332)

$$\Rightarrow I_y = \frac{\pi (d/2)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (3)$$

$$(1), (2) \text{ och } (3) \Rightarrow \sigma(x, z) = \frac{64 P(L-x)}{\pi d^4} z \Rightarrow \text{störst när } \begin{cases} x=0 \\ z=\pm d/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\sigma|_{\max} = \frac{32 PL}{\pi d_{\min}^3} = \sigma_{\text{till}} \Rightarrow d_{\min} = \left(\frac{32 PL}{\pi \sigma_{\text{till}}} \right)^{1/3} \approx \underline{\underline{116 \text{ mm}}} \quad (\text{avrunda uppåt, säkrare})$$

b) Sökt: ok att försumma egenvikten? ($\rho \approx 600 \text{ kg/m}^3$, $g = 9,82 \text{ m/s}^2$)Hur?: Räkna ut spänningen för σ_b $Q = \rho g V$ Total spänning blir $\sigma_a(x, z) + \sigma_b(x, z) = \sigma_{\text{tot}}(x, z)$
försumbar? \rightarrow om ja, $d = 115 \text{ mm}$ ok

$$\text{Lösning: } V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot L \Rightarrow Q = \frac{\pi \rho g d^2 L}{4} \approx 125 \text{ N} \quad (d = 116 \text{ mm})$$

$\approx 8\% \text{ av } 1500 \text{ N}$

$$\text{Snitta} \Rightarrow \text{Största moment} \Rightarrow M_{\max} = M(x=0) = M_R = \frac{QL}{2} = \frac{\pi \rho g d^2 L^2}{8} \quad (4)$$

nära väggen

$$\Rightarrow |\sigma_b|_{\max} = \frac{32 QL}{2\pi d^3} = \frac{4 \rho g L^2}{d} \approx 0,8 \text{ MPa} = 4\% \text{ av } 20 \text{ MPa}$$

 \Rightarrow Strunta i egenvikten och släng på en säkerhetsmargin!

2.9.37.

c) Sölet: Vilken dimension behövs om man tar en IPE-balk av stål istället?

(IPE-balkar finns beskrivna i F.S. s.339) (s.357)



Lösning: $\sigma_{till} = 100 \text{ MPa}$ (billigt stål!)

$$|\sigma|_{max} = \sigma_{till} = \frac{|M|_{max} |z|_{max}}{I_y} = \frac{|M|_{max}}{W_y} \leftarrow W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}} = \text{böjmotstånd, } y \text{ står för böjning kring } y\text{-axel.}$$

$$\Rightarrow W_y \geq \frac{|M|_{max}}{\sigma_{till}} = \frac{PL}{\sigma_{till}} \left(+ \frac{QL}{2\sigma_{till}} \right) \text{ om egenvikt tas med}$$

↑ Balken måste ha tillräckligt högt böjmotstånd

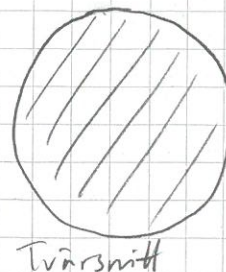
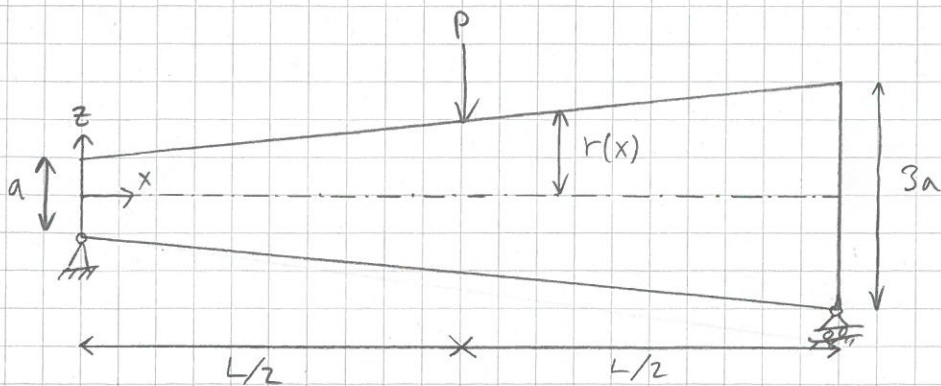
$$W_y \geq \underbrace{\frac{PL}{\sigma_{till}}}_{30 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} + \frac{QL}{2\sigma_{till}}$$

$$\text{"IPE 100"} \Rightarrow W_y = 34 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\text{Test} \Rightarrow \frac{QL}{2\sigma_{till}} \approx 3,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \Rightarrow \text{Totalt behövs } 33,2 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Svar: IPE 100 ok

2.4.42.

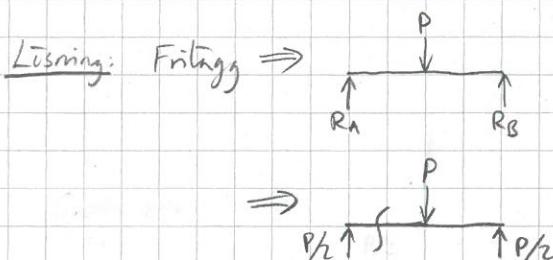


Sökt: Största spänning till storlek och läge

Här: F.S. s. 61 6.7 $\Rightarrow \sigma = \underbrace{\left(\frac{N}{A}\right)}_{=0} + \frac{Mz}{I_y}$ — M-diagram — T-diagram — Fritägg
 (s. 59 i gamla blå) — störst (till belopp) vid topp och botten

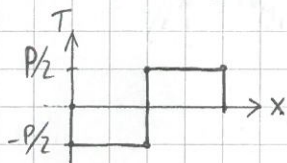
F.S. s. 344 $\Rightarrow I_y = \frac{\pi r^4}{4}$
 tabell 30.1.3

(F.S. s. 332)
 tabell 31.1.3
 i gamla blå



Jämv. eller symmetri $\Rightarrow R_A = R_B = P/2$

T-diagram, gå från vänster, gå mot pilarna:



Integrera, ändarna roterar fritt $\Rightarrow M(0) = M(L) = 0$



Kom ihåg att $\sigma = \frac{Mz}{I} \Rightarrow$ stort M (i belopp) ger stora spänningar

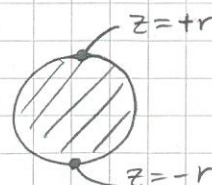
M speglas i mitten, men balken är tunnare på vänster halva \Rightarrow alltid större σ
 \Rightarrow mindre I

\Rightarrow Barn vänster halva intressant $\Rightarrow M = -\frac{P}{2}x$ (rät linje med derivata $-\frac{P}{2}$, $M=0$ vid $x=0$)

$I_y = \frac{\pi r^4}{4} \Rightarrow$ behöver $r(x)$

Varierar linjärt $\Rightarrow r(x) = m + kx$
 $r(0) = a/2$
 $r(L) = 3a/2$
 $\Rightarrow r(x) = \frac{a}{2} + \frac{ax}{L}$

z blir som störst (till belopp) när $z = \pm r(x)$, dvs. här:



2.9.42.

Fortsättning.

$$\sigma = \frac{Mz}{I} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{(-Px/2)(\pm r)}{\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)} = \{\text{ignorera tecken}\} = \frac{4}{2} \frac{Px r}{\pi r^4} = \boxed{\frac{2P}{\pi} \times r^{-3}}$$

För att hitta största spänning (till belopp), derivera, sätt = 0.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2P}{\pi} \times r^{-3} \right) = \frac{2P}{\pi} \left[(1 \cdot r^{-3}) + x \underbrace{\frac{d(r^{-3})}{dx}}_{\substack{\text{inre derivata} \\ -3r^{-4} \cdot \frac{dr}{dx} \\ -3r^{-4} \cdot (a/L)}} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2P}{\pi} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3a}{L} \frac{x}{r^4} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{3a}{L} \frac{x}{r^4} \Leftrightarrow x = \frac{Lr}{3a}$$

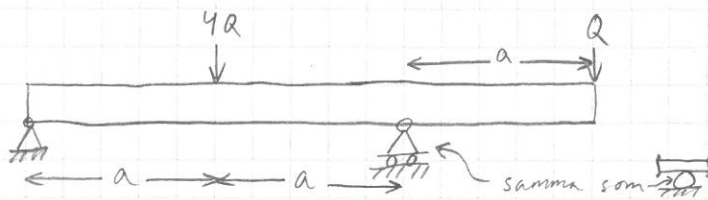
$$r = \frac{a}{2} + \frac{ax}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{3a} \left(\frac{a}{2} + \frac{ax}{L} \right) \Leftrightarrow 3x = \frac{L}{2} + x \Leftrightarrow 2x = \frac{L}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{L}{4}}$$

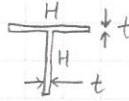
$$x = \frac{L}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{2} + \frac{a}{L} \left(\frac{L}{4} \right) = \boxed{\frac{3a}{4} = r}$$

$$\Rightarrow \text{Störst spänning vid } x = \frac{L}{4}, z = \pm \frac{3a}{4}$$


$$|\sigma_{\max}| = \frac{2P}{\pi} \left(\frac{L}{4} \right) r^{-3} = \boxed{\frac{32}{27} \frac{PL}{\pi a^3}}$$

2.4.39.

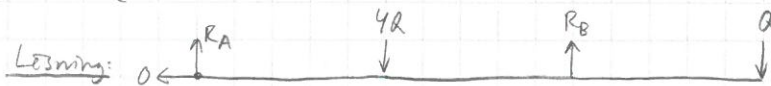


Tvårsnitt: a)  $z=0$ vid tyngdpunkt, e_z från botten (s.334) F.S. s.346 (s.334)

b)  F.S. s.344 (s.332)

c)  tunnväggig ($t \ll H$) F.S. s.344 (s.332)

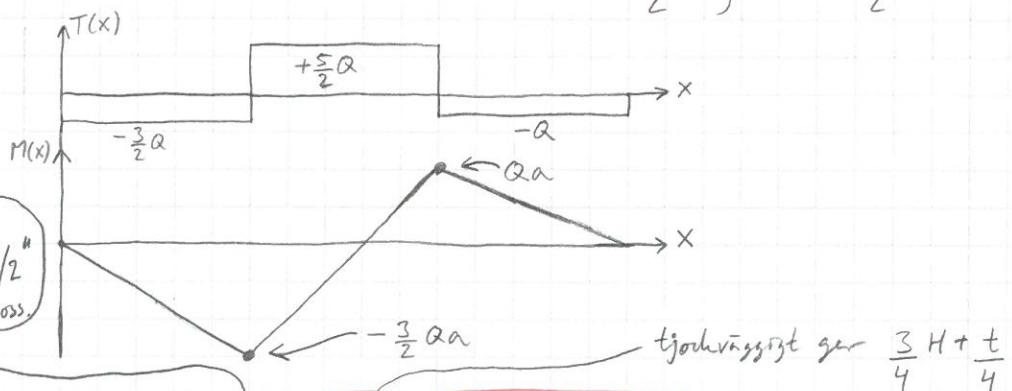
Sökt: $\begin{cases} \sigma_{max} \\ \sigma_{min} \end{cases}$ för de olika tvärsnitten



$$\begin{aligned} \text{Juv } \uparrow: R_A + R_B &= 5Q \Leftrightarrow R_A = 5Q - R_B \\ \text{Juv } \curvearrowleft: R_B 2a - 4Qa - Q3a &= 0 \Leftrightarrow R_B = \frac{7}{2}Q \end{aligned} \Rightarrow R_A = \frac{3}{2}Q$$

Väldigt gamla versioner av den blå

Trycket i äldre F.S. Det ska vara " $Ht/2$ " som blir $Ht/2$ för oss.



a) $e_z = H \cdot \frac{Ht + Ht/2}{Ht + Ht} = \frac{3}{4}H \Rightarrow \begin{cases} z_{max} = 1/4 \cdot H \\ z_{min} = -3/4 \cdot H \end{cases}$

$$I_y = \frac{tH^3}{12} + Ht \left(\frac{3}{4}H - \frac{H}{2} \right)^2 + Ht \left(H - \frac{3}{4}H \right)^2 = tH^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5tH^3}{24}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} z \Rightarrow \text{Vid } 4Q: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{27}{5} \frac{Qa}{tH^2} \\ \sigma_{min} = -\frac{9}{5} \frac{Qa}{tH^2} \end{cases}, \text{ Vid } R_B: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{6}{5} \frac{Qa}{tH^2} \\ \sigma_{min} = -\frac{18}{5} \frac{Qa}{tH^2} \end{cases}$$

störst minst

b) $e_z = \frac{2}{3}H \Rightarrow \begin{cases} z_{max} = 2/3 H \\ z_{min} = -1/3 H \end{cases} \Rightarrow \text{Vid } 4Q: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{18}{H^3} \frac{Qa}{H^3} \\ \sigma_{min} = -\frac{36}{H^3} \frac{Qa}{H^3} \end{cases}, \text{ Vid } R_B: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{24}{H^3} \frac{Qa}{H^3} \\ \sigma_{min} = -\frac{12}{H^3} \frac{Qa}{H^3} \end{cases}$

från toppen

c) $\begin{cases} z_{max} = H, z_{min} = -H \\ I_y = \pi H^3 t \end{cases} \Rightarrow \text{Vid } 4Q: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{3}{2} \frac{Qa}{\pi H^2 t} \\ \sigma_{min} = -\frac{3}{2} \frac{Qa}{\pi H^2 t} \end{cases}, \text{ Vid } R_B: \begin{cases} \sigma_{max} = \frac{Qa}{\pi H^2 t} \\ \sigma_{min} = -\frac{Qa}{\pi H^2 t} \end{cases}$