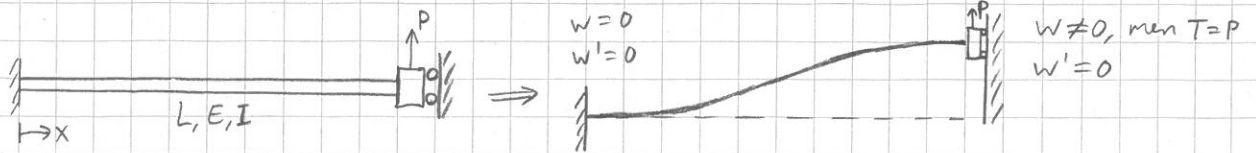


2.4.123.



Sölet: $w(L)$

Huv?: $(EI w'')'' = q(x)$ F.S. 6.20 s. 64 "Elastiska linjens ekv." (s. 62 i gamla btk)

Lösning: $q = 0$, EI konst. $\Rightarrow EI w'''' = 0 = q(x)$

$$\Rightarrow EI w'''' = C_1$$

$$\Rightarrow EI w'' = C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow EI w' = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\Rightarrow EI w = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

$$\begin{aligned} &= -T(x) \\ &= -M(x) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{F.S. 6.3 s. 60} \\ \text{(s. 58 i gamla)} \end{array}$$

Randvillkor:

$$1. w(0) = 0$$

$$2. w'(0) = 0$$

$$3. T(L) = P \Rightarrow -EI w''' = P$$

$$4. w'(L) = 0$$

(Tips: Vi varje rand vet man: w eller T
 w' eller M)

$$\left(\begin{array}{c} \text{Huv: } P - T = 0 \Rightarrow T = +P \end{array} \right)$$

$$R.V.1 \Rightarrow C_4 = 0$$

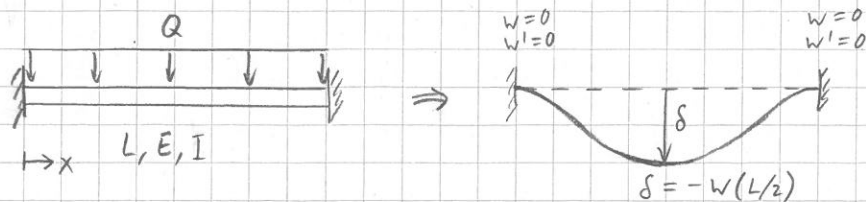
$$R.V.2 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$R.V.3 \Rightarrow -EI w''' = -C_1 = P \Leftrightarrow C_1 = -P$$

$$R.V.4 \Rightarrow EI w'(L) = 0 = \frac{(-P)}{2} L^2 + C_2 L \Leftrightarrow C_2 = \frac{PL}{2}$$

$$\Rightarrow w(L) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{6} L^3 + \frac{PL}{4} \cdot L^2 \right) = \frac{PL^3}{EI} \left(-\frac{2}{12} + \frac{3}{12} \right) = \frac{1}{12} \frac{PL^3}{EI}$$

2.4.120.



Sölet: $M(0)$, $M(L)$, δ

Huv: Symmetri $\Rightarrow M(0) = M(L) = -EI w''(0) = -EI w''(L)$

$$\delta = -w(L/2)$$

Behövs w'' och $w \Rightarrow$

\Rightarrow Elastiska linjens ekv. $(EI w'')'' = q$

Lösning: $q = -\frac{Q}{L}$, EI konstant $\Rightarrow EI w'''' = -\frac{Q}{L}$

Noten tecknet! (För att knotten pekar neråt)

$$\Rightarrow EI w''' = -\frac{Q}{L}x + C_1$$

$$\Rightarrow EI w'' = -\frac{Q}{2L}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI w' = -\frac{Q}{6L}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$\Rightarrow EI w = -\frac{Q}{24L}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

Randvillkor:

$$1. w(0) = 0$$

$$2. w'(0) = 0$$

$$3. w(L) = 0$$

$$4. w'(L) = 0$$

$$R.V.1 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$R.V.2 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$R.V.3 \Rightarrow EI w(L) = 0 = -\frac{Q}{24L}L^4 + \frac{C_1}{6}L^3 + \frac{C_2}{2}L^2 \Leftrightarrow C_1L + 3C_2 = \frac{QL}{4} \quad (1)$$

$$R.V.4 \Rightarrow EI w'(L) = 0 = -\frac{Q}{6L}L^3 + \frac{C_1}{2}L^2 + C_2L \Leftrightarrow C_1L + 2C_2 = \frac{QL}{3} \quad (2)$$

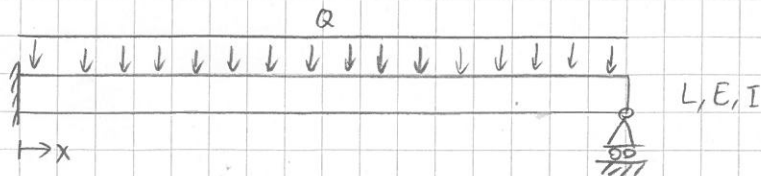
$$(1) - (2) \Rightarrow C_2 = \frac{QL}{4} - \frac{QL}{3} = -\frac{QL}{12}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{2}$$

$$M(0) = M(L) = -EI w''(0) = -C_2 = \underline{\underline{\frac{QL}{12}}}$$

$$\delta = -w(L/2) = \dots = \underline{\underline{\frac{1}{384} \frac{QL^3}{EI}}}$$

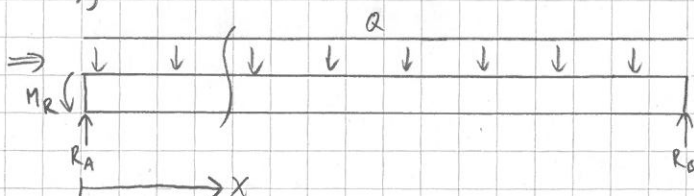
2.4.117.



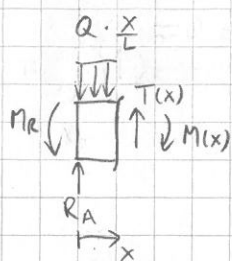
Sökt: Reaktionskrafter — R_A, R_B
 Reaktionsmoment — M_R
 Vinkeländring vid stödet när man deformerar — θ_B

Har: Elastiska linsens ekvation!

Fritägg + Snitta + Jmv \Rightarrow Bättre bild av situationen



Snitta vid " $x=0$ "



$$\uparrow: R_A + T(0) + \underbrace{Q \frac{x}{L}}_{=0 \text{ vid } x=0} = 0 \Leftrightarrow R_A = -T(0) = EI w'''(0)$$

Vid $x=0$ har knuterna ingen hävarm

$$\curvearrowleft: M_R - M(0) + T(0) \cdot 0 - \underbrace{Q \frac{0}{L} \cdot \frac{0}{2}}_{=0} = 0 \Leftrightarrow M_R = M(0) = -EI w''(0)$$

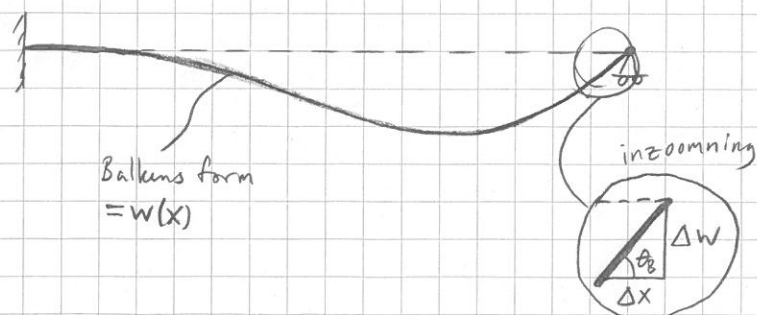
Snitta vid höger ände, $x=L$, på samma sätt \Rightarrow

$$\Rightarrow R_B = T(L) = -EI w'''(L)$$

$$\theta_B = w'(L)$$

\rightarrow Balkens form ges av $w(x)$, så om $w'(x)$ är lutningen på $w(x)$, så är $w'(x)$ också lutningen på balken.

Skissa deformationen:



$$\tan \theta_B = \frac{\Delta w}{\Delta x} = w'$$

$$\theta_B \text{ litet} \Rightarrow \tan \theta_B \approx \theta_B = w'$$

2. 4. 117.

Vet vad som är sökt! Lös diff. elev. \Rightarrow Allt känt!

$$q = -\frac{Q}{L}, \quad E \text{ och } I \text{ konstanta}$$

$$\Rightarrow (EI w'')'' = q \Rightarrow EI w'''' = -\frac{Q}{L}$$

$$\Rightarrow EI w''' = -\frac{Q}{L}x + C_1$$

$$\Rightarrow EI w'' = -\frac{Q}{2L}x^2 + C_1x + C_2$$

$$\Rightarrow EI w' = -\frac{Q}{6L}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$$

$$\Rightarrow EI w = -\frac{Q}{24L}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$$

Randvillkor:

1. $w(0) = 0$ (pga. stöd mot vägg)

2. $w'(0) = 0$ ←

3. $w(L) = 0$ (pga. stöd)

4. $M(L) = 0$ (pga. fri att rotera i höger ände) $\Rightarrow EI w''(L) = 0$

pga. vägg:



Om $w'(0) \neq 0$ så ser det ut så här.
Det är inte bra!

[Notera att $(w \leftrightarrow T)$ dessa hör ihop parvis. Vid båda ändar vet vi alltid något om dessa par. Om inte T , så w . Om inte M , så w' .]

R.V.1 $\Rightarrow EI w(0) = 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$

R.V.2 $\Rightarrow EI w'(0) = 0 = 0 + 0 + 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0$

R.V.3 $\Rightarrow EI w(L) = 0 = -\frac{Q}{24L}(L)^4 + \frac{C_1}{6}(L)^3 + \frac{C_2}{2}(L)^2 \Leftrightarrow C_1L + 3C_2 = \frac{QL}{4}$ (1)

R.V.4 $\Rightarrow EI w''(L) = 0 = -\frac{Q}{2L}(L)^2 + C_1(L) + C_2 \Leftrightarrow C_1L + C_2 = \frac{QL}{2}$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow 2C_2 = \frac{QL}{4} - \frac{QL}{2} = -\frac{QL}{4} \Rightarrow C_2 = -\frac{QL}{8}$

$\Rightarrow C_1L + C_2 = C_1L - \frac{QL}{8} = \frac{QL}{2} \Leftrightarrow C_1 = \frac{5Q}{8}$

Allt känt! SÅH M och räkna ut:

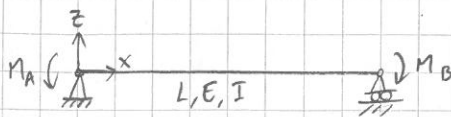
$R_A = EI w''''(0) = C_1 = \frac{5Q}{8}$

$R_B = -EI w''''(L) = \frac{Q \cdot (L)}{L} - C_1 = Q - \frac{5Q}{8} = \frac{3Q}{8}$

$M_R = -EI w''(0) = -C_2 = \frac{QL}{8}$

$\theta_B = w'(L) = \dots = \frac{1}{48} \frac{QL^2}{EI}$

2.4.77.



Sökt: $w(x)$, utböjningen, använd elastiska linjens ekvation.

Hur?: Elast. lin. ekv. \Rightarrow F.S. s. 62, 6.20 \Rightarrow (F.S. s. 64, 6.20)

$$(EI w'')'' = q(x), \text{ om } EI \text{ är konstant} \Rightarrow EI w'''' = q(x)$$

Integrera 4 ggr, randvillkor $\Rightarrow w(x)$

Lösning: $q(x) = 0$ (ingen utbredd last)

$$\Rightarrow EI w'''' = 0$$

$$\Rightarrow EI w''' = C_1$$

$$\Rightarrow EI w'' = C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow EI w' = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\Rightarrow EI w = \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

4 okända konstanter, behöver 4 randvillkor

Randvillkor:

1: $w(0) = 0$

2: $w(L) = 0$

3: $M(0) = M_A$

4: $M(L) = M_B$

← Balken sitter fast, kan inte ha någon utböjning

R.V.1

R.V.2

← Måste "översättas" till w eller w 's derivatorer.

$$\text{F.S. s. 58, 6.3} \Rightarrow T = \int -q dx, \quad M = \int T dx \quad (\text{F.S. s. 60, 6.3})$$

$$\text{Så om } EI w'''' = q \Rightarrow EI w''' = -T \\ \Rightarrow EI w'' = -M$$

$$\Rightarrow M(0) = M_A \Leftrightarrow EI w''(0) = -M_A$$

R.V.3

$$\Rightarrow M(L) = M_B \Leftrightarrow EI w''(L) = -M_B$$

R.V.4

$$\text{R.V.1} \Rightarrow EI \underbrace{w(0)}_{=0} = 0 + 0 + 0 + C_4 \Leftrightarrow C_4 = 0$$

$$\text{R.V.3} \Rightarrow \underbrace{EI w''(0)}_{-M_A} = 0 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = -M_A$$

$$\text{R.V.4} \Rightarrow \underbrace{EI w''(L)}_{-M_B} = C_1 \cdot L + \underbrace{C_2}_{-M_A} \Leftrightarrow C_1 = \frac{M_A - M_B}{L}$$

$$\text{R.V.2} \Rightarrow EI \underbrace{w(L)}_{=0} = \frac{(M_A - M_B)}{6L} \cdot (L)^3 + \frac{(-M_A)}{2} \cdot (L)^2 + C_3 \cdot (L) + 0 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow C_3 = \frac{(2M_A + M_B)L}{6}$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{M_A - M_B}{6EI} \frac{x^3}{L} - \frac{M_A}{2EI} x^2 + \frac{2M_A + M_B}{6EI} xL$$