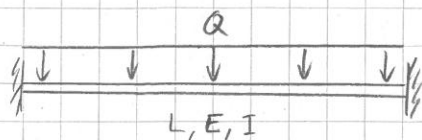


2.4.120.



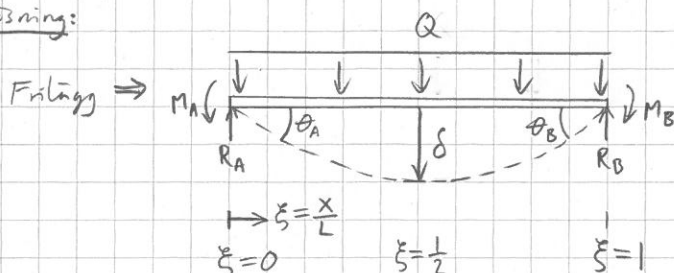
Sökt: $M(0)$, $M(L)$, $\delta = -w(L/2)$ med elementarfall

Hur?: F.S. s. 356-357 (s. 344-345 i gamla bki)

Välj elementarfall så att du får med alla yttre krafter och moment.

Fritägg först för att inte missa något.

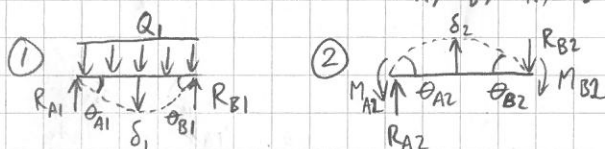
Lösning:



Elementarfall 31.2.3 $\Rightarrow Q, R_A, R_B$ ①

Elementarfall 31.2.5 $\Rightarrow M_A, M_B, R_A, R_B$ ②

(32.2.3 i gamla bki)
(32.2.5 i gamla bki)



Verkligt fall = Elementarfall ① + Elementarfall ②

	Q	$=$	Q_1	$+$	—
Sökt!	M_A	$=$	—	$+$	M_{A2}
Sökt!	M_B	$=$	—	$+$	M_{B2}
	R_A	$=$	R_{A1}	$+$	R_{A2}
	R_B	$=$	R_{B1}	$+$	$-R_{B2}$ (minus pga. fel riktning)
Sökt!	δ	$=$	δ_1	$+$	$-\delta_2$
	θ_A	$=$	θ_{A1}	$+$	$-\theta_{A2}$
	θ_B	$=$	θ_{B1}	$+$	$-\theta_{B2}$

Använd elementarfallens färdiga lösningar och se om vi får ut något:

$$\delta = \delta_1 - \delta_2$$

$$\delta_1 = \delta\left(\xi = \frac{1}{2}\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{QL^3}{EI}$$

För δ_2 : Vi vet att $M_{A2} = M_{B2} = M$ pga. symmetri \Rightarrow Får använda den enkla formeln:

$$\delta_2 = \delta\left(\xi = \frac{1}{2}\right) = \frac{ML^2}{2EI} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{ML^2}{8EI}$$

$$\text{Så: } \delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{5}{384} \frac{QL^3}{EI} - \frac{ML^2}{8EI}, \text{ men vad är } M?$$

2.9.120.

Fortsättning

①: Q deformerar och orsakar θ_{A1} och θ_{B1} .

②: Väggen svarar med reaktionsmoment som drar tillbaka med θ_{A2} resp. θ_{B2} .

Totalt vel i att $\theta_A = \theta_B = 0$ pga. väggen.

Så: Randvillkor: $\theta_A = \theta_{A1} - \theta_{A2} = 0 \Leftrightarrow \theta_{A1} = \theta_{A2}$

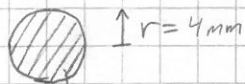
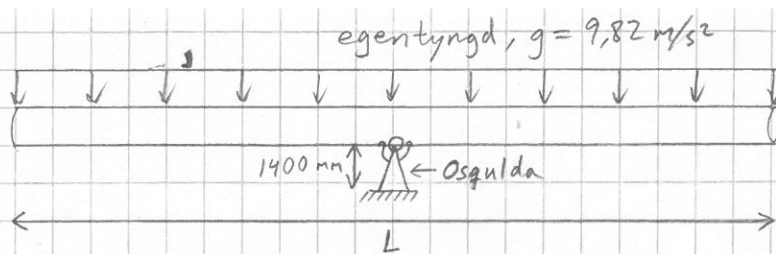
(och $\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} = 0 \Leftrightarrow \theta_{B1} = \theta_{B2}$) ← Ger samma ekvationer pga. symmetri, så behövs ej.

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{A1} = \frac{QL^2}{24EI} \\ \theta_{A2} = \frac{ML}{2EI} \end{array} \right\} \text{R.V.} \Rightarrow \frac{QL^2}{24EI} = \frac{ML}{2EI} \Leftrightarrow M = \frac{QL}{12} = M_A = M_B$$

Aha! En länk mellan M och Q !

$$\text{Tillbaka till: } \delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{5}{384} \frac{QL^3}{EI} - \left(\frac{QL}{12} \right) \frac{L^2}{8EI} = \left(\frac{5}{384} - \frac{1}{96} \right) \frac{QL^3}{EI} = \frac{1}{384} \frac{QL^3}{EI}$$

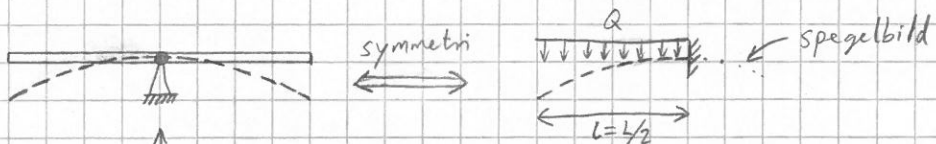
2. 4. 102.



stål: $E = 200 \text{ GPa} = (200\,000 \text{ N/mm}^2)$
 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3 = (10^{-9} \cdot 7850 \text{ kg/mm}^3)$

Söket: Lmax så att ändarna inte böjs ner och tar i marken.

Hur?:



Tvärsnittet måste förbli vinkelritt pga symmetri \Rightarrow
 \Rightarrow kan modelleras som en fast inspänning \Rightarrow
 \Rightarrow konsolbalk! (F.S. 32.1.3)

Lösning: F.S. 31.1.3 $\Rightarrow \delta(\xi=0) = \frac{Q L^3}{24 EI} (\xi^4 - 4\xi + 3) = \frac{Q L^3}{8 EI}$ (1)
 s. 356
 (s. 344 i gamla bki)

Behöver $L, Q, I!$

$L = L/2$ (2)

$Q = \rho g V = \rho g A L = \rho g \pi r^2 L/2$ (3)

$I = \{ \text{F.S. 30.1.3} \} = \frac{\pi r^4}{4}$ (4)
 s. 344
 (s. 332 i gamla bki)

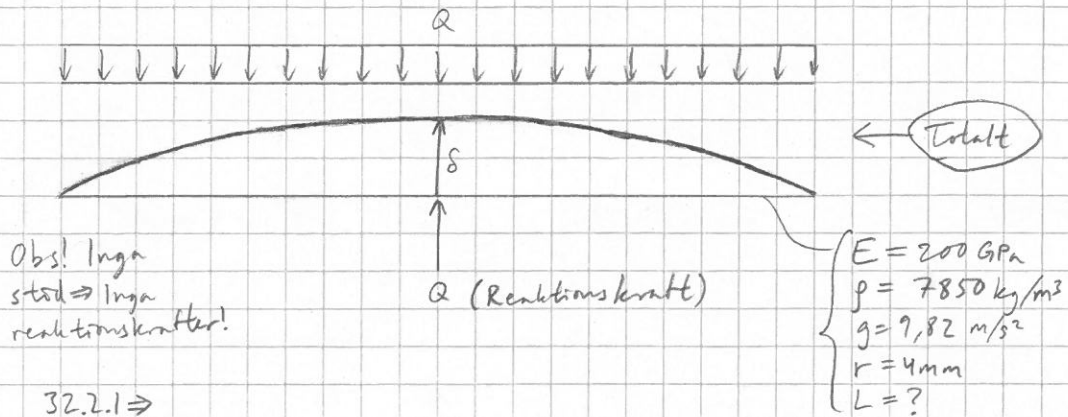
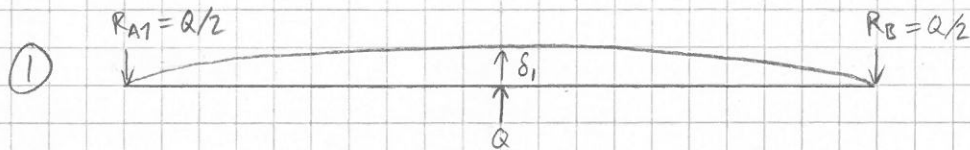
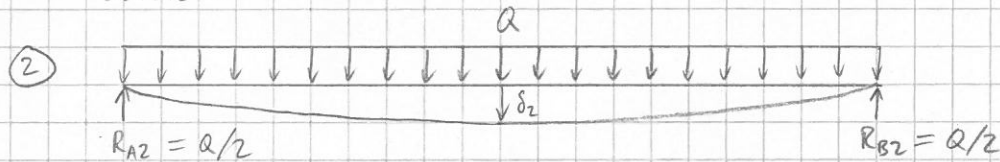
Sätt in (2-4) i (1) $\Rightarrow \delta = \frac{(\rho g \pi r^2 L/2)(L/2)^2}{8 E (\pi r^4/4)} = \frac{2 \rho g L^4}{64 E r^2} = \frac{\rho g L^4}{32 E r^2}$ (5)

Krav: $\delta \leq 1400 \text{ mm} \Leftrightarrow \frac{\rho g L^4}{32 E r^2} \leq 1400 \text{ mm} \Rightarrow L \leq \left(\frac{32 E r^2 \cdot 1400 \text{ mm}}{\rho g} \right)^{1/4} \Rightarrow$
 $= 6566,9 \dots \text{ mm}$
 $\approx 6,5 \text{ m}$ (avrunda åt det säkra hållet)

$\Rightarrow L \leq 6,5 \text{ m}$ (\leftarrow väger ca 25 kg)

2. 4. 102.

Alternativ lösning med elementarfall 32.2.1 + 32.2.3

32.2.1 \Rightarrow 32.2.3 \Rightarrow Kontroll: Inga reaktionskrafter vid ändarna totalt sett

$$R_A = R_{A2} - R_{A1} = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} = 0 \quad \left| \quad R_B = R_{B2} - R_{B1} = \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} = 0 \quad \text{ok!}$$

① + ② = "totalt", inget saknas

$$\Rightarrow \delta = \delta_1 - \delta_2 = 1400 \text{ mm} = \underbrace{\frac{QL^3}{3EI} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\delta_1} - \underbrace{\frac{5}{384} \frac{QL^3}{EI}}_{\delta_2} = \frac{QL^3}{EI} \left(\frac{1}{48} - \frac{5}{384} \right)$$

riktning!

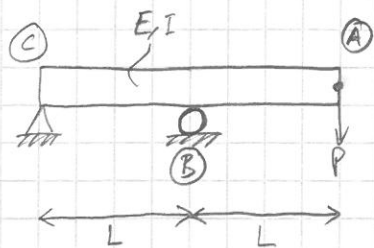
1/128



$$\left. \begin{aligned} Q &= mg = \rho Vg = \rho ALg = \rho \pi r^2 Lg \\ I &= \frac{\pi r^4}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Q}{I} = \frac{\rho \pi r^2 Lg}{\pi r^4/4} = \frac{4\rho g L}{r^2}$$

$$1400 \text{ mm} = \frac{QL^3}{128EI} = \frac{\rho g L^4}{32Er^2} \Leftrightarrow L^4 = \frac{1400 \text{ mm} \cdot 32Er^2}{\rho g} \Rightarrow L = 6566,9... \text{ mm} \approx 6,5 \text{ m}$$

Avrunda åt det säkra hållet!

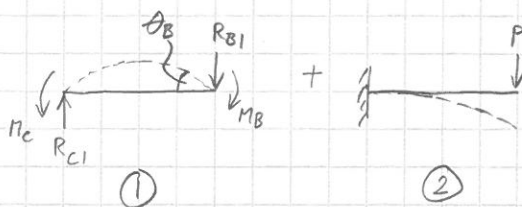
2.4.103.



( och  är samma sak)

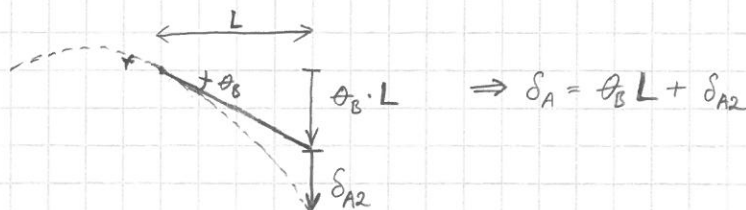
Sölet: δ_A

Hur? Dela upp i:



Notera att del ① slutar i vinkeln θ_B som gör att del ② lutar

neråt:

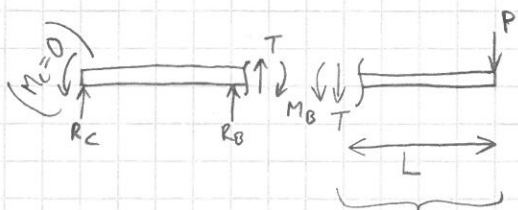


Lösning: Börja med bidraget $\theta_B L$ från ① \Rightarrow behöver θ_B

Problem 1: Vad är M_C , M_B ?

$M_C = 0$, för vi lägger inte på någon last, fri ände

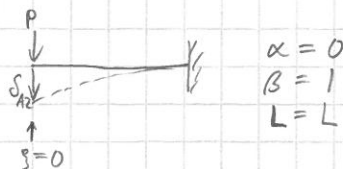
$M_B \neq 0$, för del ② överför ett snittmoment \Rightarrow snitta precis höger om mitten!



$$\text{Jmv (B): } -M_B + P \cdot L = 0 \Rightarrow M_B = +PL$$

$$\Rightarrow \theta_B = \frac{M_C L}{EI} + \frac{M_B L}{EI} = \frac{PL^2}{EI}$$

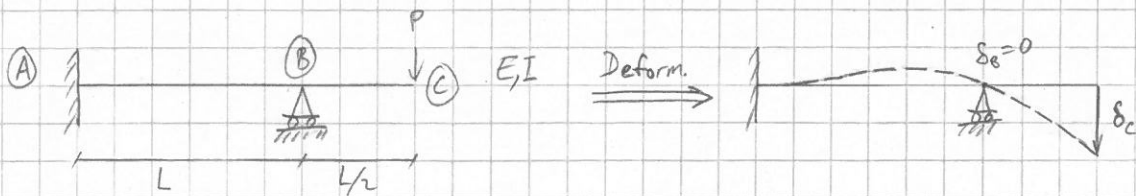
Behöver δ_{A2} från elementarfall ②:



$$\Rightarrow \delta_{A2} = \delta(\xi = \alpha) = \frac{PL^3}{EI} \beta^3 = \frac{PL^3}{EI}$$

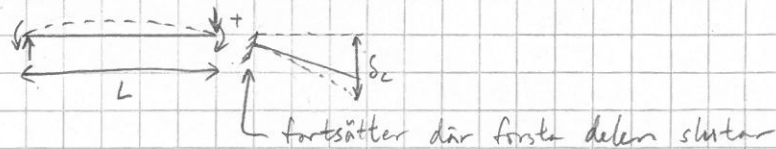
$$\text{Så totalt: } \delta_A = \theta_B L + \delta_{A2} = \frac{PL^2}{EI} \cdot L + \frac{PL^3}{EI} = \frac{2PL^3}{EI}$$

2.4.122.

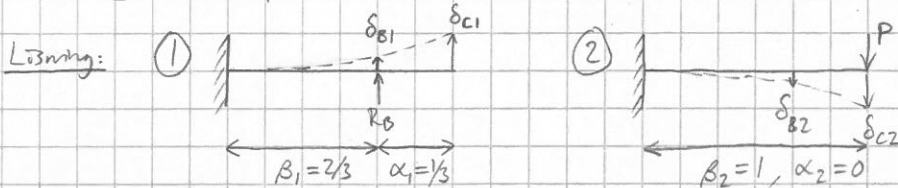


Sölet: R_B, δ_c

Hur?: Bokens lösning är F.S. 31.2.5 + F.S. 31.1.1 (32.2.5, 32.1.1 i gamla blå)

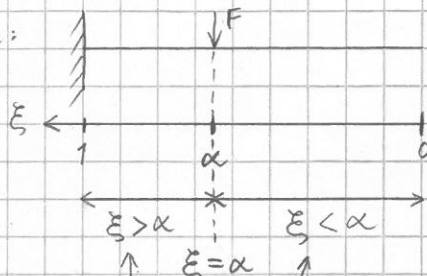


Jag delar upp i två fall av F.S. 31.1.1 istället.



Vill ha δ_c , $\delta_c = \delta_{c2} - \delta_{c1}$

Allmänt:



Olåken formler inom områdena, välj rätt!
Båda formler funkar, lösning för $\xi = \alpha$ kan finnas direkt.

$$\delta_{c2} = \delta_2(\xi = 0 = \alpha_2) = \frac{PL^3}{3EI} \beta_2^3 = \frac{P}{3EI} \left(\frac{3L}{2}\right)^3 \cdot 1^3 = \frac{9}{8} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta_{c1} = \delta_1(\xi = 0 < \alpha_1) = \frac{R_B L^3}{6EI} [-\beta_1^3 + 3\beta_1^2(1 - \xi)] = \frac{9}{16} \frac{R_B L^3}{EI} \left(\frac{28}{27}\right) = \frac{7}{12} \frac{R_B L^3}{EI}$$

Behöver R_B ! Vet att $\delta_B = \delta_{B2} - \delta_{B1} = 0 \Leftrightarrow \delta_{B1} = \delta_{B2}$

$$\delta_{B2} = \delta_2(\xi = 1/3 > \alpha_2) = \frac{PL^3}{6EI} [(\xi - \alpha_2)^3 - 3\beta_2^2(\xi - \alpha) + 2\beta_2^3] = \frac{9}{16} \frac{PL^3}{EI} \left(\frac{28}{27}\right) = \frac{7}{12} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\delta_{B1} = \delta_1(\xi = 1/3 = \alpha_1) = \frac{R_B L^3}{3EI} \beta_1^3 = \frac{R_B L^3}{3EI} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{R_B L^3}{3EI} = \frac{7}{12} \frac{PL^3}{EI} \Leftrightarrow R_B = \frac{7}{4} P$$

$$(1) \Rightarrow \delta_c = \frac{9}{8} \frac{PL^3}{EI} - \frac{7}{12} \frac{R_B L^3}{EI} = \frac{9}{8} \frac{PL^3}{EI} - \frac{7}{12} \frac{7}{4} \frac{PL^3}{EI} = \frac{5}{48} \frac{PL^3}{EI}$$