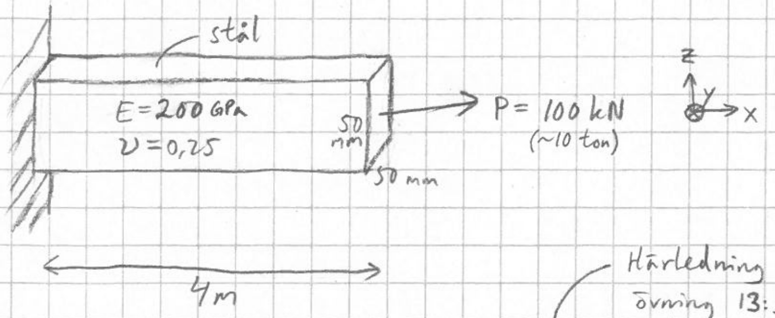
1.3.4



Härledning finns i anteckningarna från övning 13:s rekommenderade hemtal, 1.2.6.

Sökt: Volymsändring $\Delta V \simeq (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) V_0$

Lösning: F.S. 3.1, sid 22 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\underbrace{0}_{\sigma_y} + \underbrace{0}_{\sigma_z})\right] + \underbrace{\alpha \Delta T}_{=0} = \frac{\sigma_x}{E}$$

← bekant form från början av kursen.

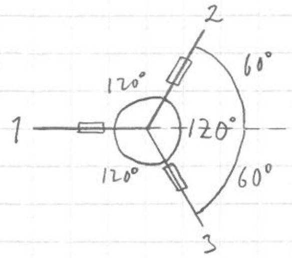
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$

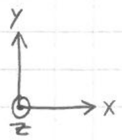
$$\Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{2\nu\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x(1-2\nu)}{E} = \frac{P(1-2\nu)}{EA} = 10^{-4} = (0{,}01\,\%\ \text{volymökning})$$

$$V_0 = 4 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2\ m^3 = 10^{-2}\ m^3 \quad (10\ \text{liter})$$

$$\Rightarrow \Delta V = 10^{-4} \cdot 10^{-2}\ m^3 = \underline{\underline{10^{-6}\ m^3}} \quad (1\ ml)$$

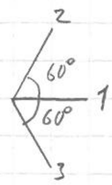
1.3.17.





$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -0{,}001 \\ \varepsilon_2 = 0{,}0004 \\ \varepsilon_3 = 0{,}0004 \end{cases}$$

(Samma sak som att sätta töjningsgivarna såhär:



)

Sökt: Tjockleksändring i plåten

Övrigt givet: Obelastad tjocklek = h
E-modul = E
Poissons tal = ν
Fri obelastad yta ⇒ plan spänning

Hur? $\Delta h = \varepsilon_z h$ ③

F.S. s.22, 3.4 ⇒ $\varepsilon_z = -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ ②
(Alt. 3.1 + $\sigma_z = 0$)

$\sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$

$\sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$

? ? ← Börja här! ①

Lösning:

① Mätare 1 sitter redan längs x ⇒ $\varepsilon_x = \varepsilon_1$

Mätare 2 och 3 ⇒ ekvationssystem ⇒ ε_y och γ_{xy}, använd F.S. s.18, 2.21

flytta över ε_x-termen

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(60°) = \underbrace{\varepsilon_x}_{-0{,}001}\underbrace{\cos^2(60°)}_{1/4} + \varepsilon_y \underbrace{\sin^2(60°)}_{3/4} + \gamma_{xy}\underbrace{\cos(60°)\sin(60°)}_{\sqrt{3}/4} = 0{,}004 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 0{,}00065 \qquad (1)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon(-60°) = \underbrace{\varepsilon_x}_{-0{,}001}\underbrace{\cos^2(-60°)}_{1/4} + \varepsilon_y \underbrace{\sin^2(-60°)}_{3/4} + \gamma_{xy}\underbrace{\cos(-60°)\sin(-60°)}_{-\sqrt{3}/4} = 0{,}004 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{xy} = 0{,}00065 \qquad (2)$$

Bara intresserade av ε_y ⇒ (1) + (2) ⇒ $\dfrac{6}{4}\varepsilon_y + 0 = 0{,}0013 \Rightarrow \varepsilon_y = \dfrac{0{,}0026}{3} = 8{,}666\dots$

② $$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E\,(1+\nu)(\varepsilon_x+\varepsilon_y)}{(1-\nu)(1+\nu)} = \frac{E}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

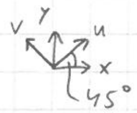
$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \left(-10 + \frac{26}{3}\right)\cdot 10^{-4} = -\frac{4}{3}\cdot 10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{4\nu}{3(1-\nu)}\cdot 10^{-4}$$

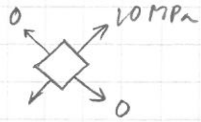
$$\Rightarrow \Delta h = \varepsilon_z h = \frac{4\nu h}{3(1-\nu)}\cdot 10^{-4} \approx 1{,}3\cdot 10^{-4}\frac{\nu h}{1-\nu}$$

1.3.18. Plåt med obelastad yta $\Rightarrow \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ (dvs. plan spänning)

$$\begin{cases} \sigma_x = 20 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -25 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 10 \text{ MPa} \end{cases} \quad + \quad \begin{cases} \sigma_u = 10 \text{ MPa} \\ \sigma_v = 0 \text{ MPa} \\ \tau_{uv} = 0 \text{ MPa} \end{cases}$$

Lastfall 1 Lastfall 2





Totalt: $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$

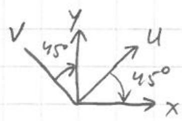
Material: Beryllium
- $E = 290$ GPa
- $\nu = 0{,}03 \leftarrow$ Obs! Otroligt lågt!
- $\rho = 1850 \text{ kg/m}^3$

Sökt: Huvudtöjningar + riktningar

Hur?
(1) Översätt Lastfall 2 till x-y-koordinater, lägg ihop med lastfall 1.
(2) Översätt $\sigma \rightarrow \varepsilon$ med Hookes lag
(3) Leta huvudtöjningar med egenvärden/egenvektorer eller Mohrs cirkel.

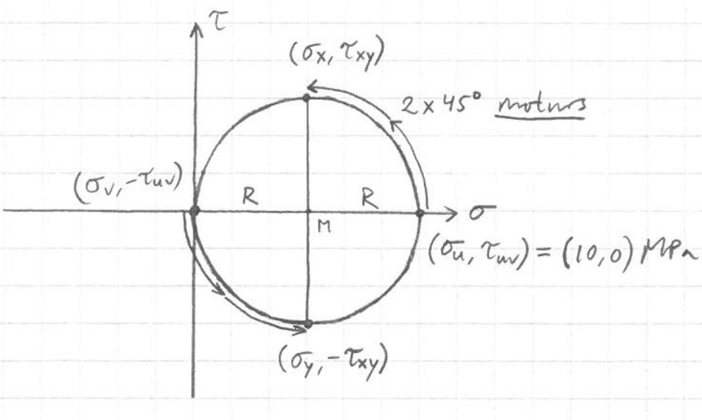
Lösning:

(1) Vill vrida $uv \rightarrow xy$, så 45° medurs i verkligheten



$\Rightarrow$ Vrid 2×45° moturs i Mohrs cirkel för att gå från $uv \rightarrow xy$.

1. Rita in kända punkter: (σ_u, τ_{uv}) och $(\sigma_v, -\tau_{uv})$
2. Rita cirkeln, räkna ut mittpunkt, M, och radie, R.
3. Gör den vridning du vill från din kända punkt, dvs. $(\sigma_u, \tau_{uv}) \rightarrow (\sigma_x, \tau_{xy})$ eller $(\sigma_v, -\tau_{uv}) \rightarrow (\sigma_y, -\tau_{xy})$
4. Läs av de spänningar du får.



$$\Rightarrow \begin{cases} R = 5 \text{ MPa} \\ M = 5 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 5 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 5 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 5 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Total spänning = Lastfall 1 + Lastfall 2 $\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 25 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -20 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 15 \text{ MPa} \end{cases}$

Behöver töjningar $\Rightarrow$ F.S. s.22, 3.4 $\Rightarrow$

(2)
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \approx 8{,}828 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \approx -7{,}155 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \approx -0{,}052 \cdot 10^{-5}$$

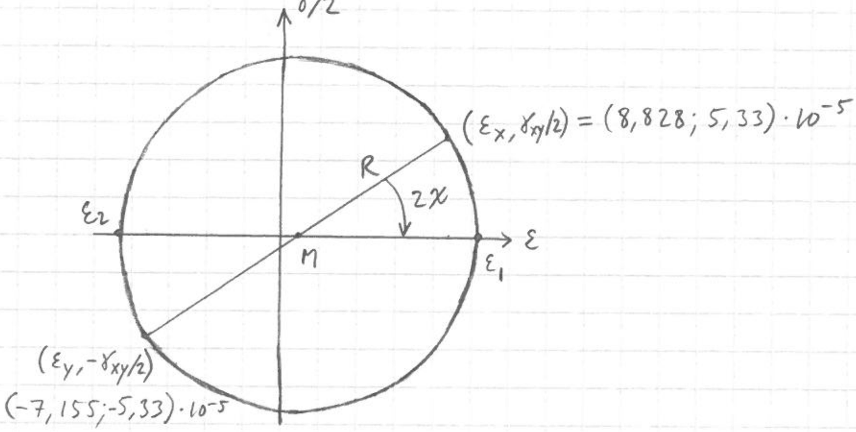
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \{\text{F.S. s.22, 3.2}\} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \approx$$
$$\approx 10{,}655 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

1.3.18. Fortsättning.

③ Om Hookes lag gäller så sammanfaller huvudspänningsriktningarna med huvudtöjningsriktningarna. // F.S. text under 3.2. på sida 22.

$\Rightarrow$ z en huvudtöjningsriktning (ty plan spänning) $\Rightarrow$ ε_z en huvudtöjning.



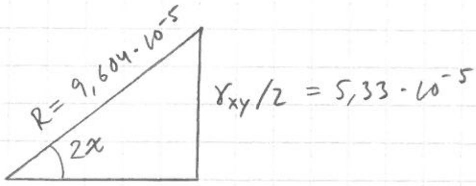
$$M = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 0{,}8365 \cdot 10^{-5}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \approx 9{,}604 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_1 = M + R \approx 10{,}4 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_2 = M - R \approx -8{,}8 \cdot 10^{-5}$$

Men kom ihåg ε_z! $\varepsilon_z = -0{,}052 \cdot 10^{-5}$ $\Rightarrow$ döp om $\Rightarrow$ $\begin{cases} \varepsilon_1 = 10{,}4 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_2 = -0{,}052 \cdot 10^{-5} \quad (\varepsilon_z) \\ \varepsilon_3 = -8{,}8 \cdot 10^{-5} \end{cases}$

För riktningar:

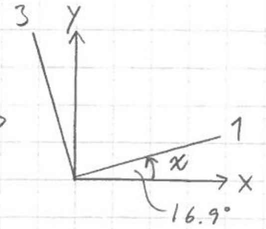


$$\Rightarrow \sin(2x) = \frac{5{,}33}{9{,}604} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{5{,}33}{9{,}604}\right) \approx \underline{\underline{16{,}9^\circ}}$$

Det var alltså $2 \times 16{,}9^\circ$ <u>medurs</u> i Mohrs cirkel för att rotera $\underline{\sigma_x \to \sigma_1}$.

Det blir alltså $16{,}9^\circ$ <u>moturs</u> i verkligheten för att rotera $\underline{x \to 1}$.

$\Rightarrow$



← Obs! Riktningar 1 och 3 eftersom ε_z visade sig vara ε_2.

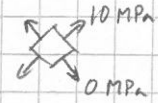
1.3.18.

Plåt med obelastad yta $\Rightarrow \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Alternativ Lösning med F.S. s.6 1.17 och 1.18

$$\begin{cases} \sigma_x = 20 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -25 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 10 \text{ MPa} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma(45^\circ) = 10 \text{ MPa} \\ \sigma(45^\circ + 90^\circ) = 0 \text{ MPa} \\ \tau(45^\circ) = 0 \text{ MPa} \end{cases}$$

Lastfall 1 Lastfall 2



Totalt: $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$

Sökt: Huvudtöjningar + Riktningar

Lösning: Material: Beryllium $E = 290$ GPa, $\nu = 0{,}03$ $\leftarrow$ Obs! Otroligt lågt!

Behöver spänningarna från Lastfall 2 $\Rightarrow$ F.S. 1.17 och 1.18, sid 6. $\Rightarrow$

$$\sigma(45^\circ) = \sigma_x \cos^2(45^\circ) + \sigma_y \sin^2(45^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(45^\circ)\cos(45^\circ) = 10 \text{ MPa} \quad (1)$$
$$= \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y + 1\,\tau_{xy}$$

$$\sigma(135^\circ) = \sigma_x \cos^2(135^\circ) + \sigma_y \sin^2(135^\circ) + 2\tau_{xy} \sin(135^\circ)\cos(135^\circ) = 0 \text{ MPa} \quad (2)$$
$$= \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y - 1\,\tau_{xy}$$

$$\tau(45^\circ) = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin(2\cdot 45^\circ) + \frac{1}{2}\sigma_y \sin(2\cdot 45^\circ) + \tau_{xy}\cos(2\cdot 45^\circ) = 0 \text{ MPa} \quad (3)$$
$$= -\frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y + 0\,\tau_{xy}$$

(1) – (3) i matrisform blir:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{A}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{A}^{-1}} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad (5)$$

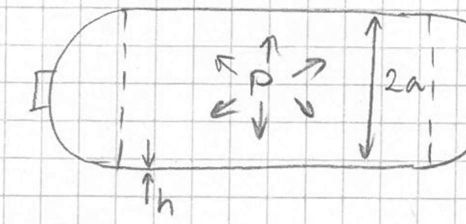
Alt. (1)+(2) $\Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = 10$ MPa, (3) $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y$ $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 5$ MPa
(1)–(2) $\Rightarrow 2\tau_{xy} = 10$ MPa $\Rightarrow 5$ MPa

$\Rightarrow$ total spänning: $\begin{cases} \sigma_x = 25 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -20 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 15 \text{ MPa} \end{cases}$

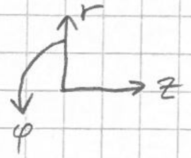
Behöver töjningar $\Rightarrow$ F.S. 3.4. sid 22 $\Rightarrow \{\Delta T = 0\} \Rightarrow$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \approx 8{,}828 \cdot 10^{-5} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \{\text{F.S } 3.2\} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} =$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) \approx -7{,}155 \cdot 10^{-5} \qquad \approx 10{,}655 \cdot 10^{-5}$$
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \approx -0{,}052 \cdot 10^{-5} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

2.8.1.



Tunnväggigt! $\Leftrightarrow h << a$

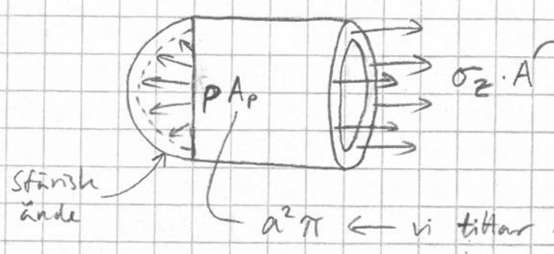


a) Sökt: Huvudspänningar i den cylindriska delen + Riktningar

Lösning: Cylindriska koordinater! r, φ, z

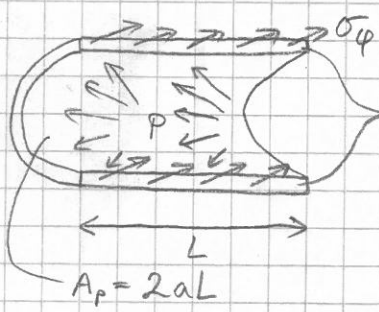
① Tunnväggigt $\Rightarrow \sigma_r \simeq 0$

② Snitta för z-led:



Jmv z: $\sigma_z 2\pi ah = p a^2 \pi \Leftrightarrow \sigma_z = \dfrac{pa}{2h}$

③ Snitta för φ-led:



Jmv ut/in i snittplanet: $\sigma_\varphi 2hL = p\,2aL \Leftrightarrow \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h}$

Rangordna $\Rightarrow$ $\sigma_1 = \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h}$, φ-led

$\sigma_2 = \sigma_z = \dfrac{1}{2}\dfrac{pa}{h}$, z-led ← Ångpanneformlerna

$\sigma_3 = \sigma_r \simeq 0$, r-led

(Dessa finns i F.S. sid 94, 7.31 om man glömmer.)
(7.30a i gamla blå, saknas helt i äldre versioner av blå F.S.)

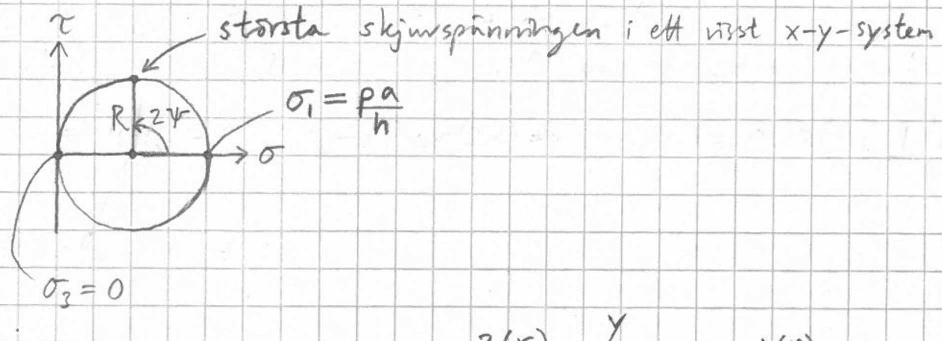
(Dessa är huvudspänningar för att $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} = 0$)

2.8.1. Forts.

b) <u>Sökt:</u> Storlek + Riktning för största skjuvspänning?

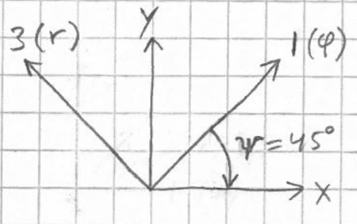
<u>Lösning:</u> Största skjuvspänningen finns <u>alltid</u> i 1-3-planet, planet med σ_1 och σ_3 alltså.

⇒ Finns i φ-r-planet. ⇒ Mohrs cirkel för 1-3-planet/φ-r-planet

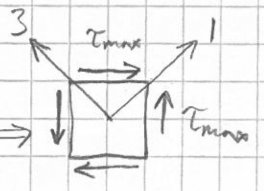


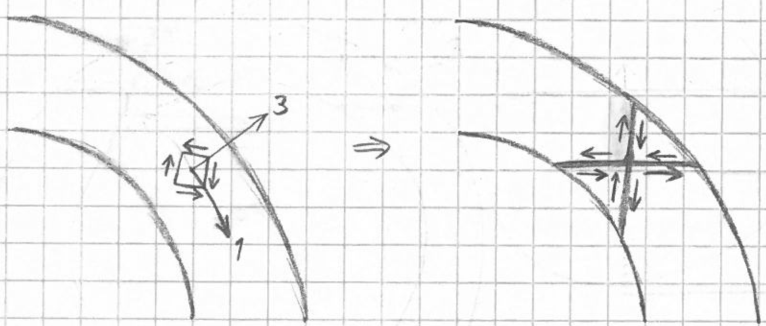
$$\tau_{max} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pa}{2h}$$

$$2\Psi = 90° \Rightarrow \Psi = 45° \Longrightarrow$$

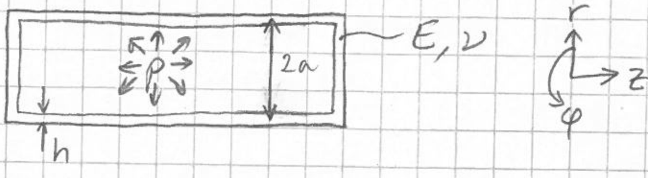


⇒





2.8.3



a) Sökt: axiell och radiell töjning, dvs. ε_z och ε_r

Från uppg 2.8.1 (alt. Ångpanneformlerna) ← Kan saknas om du har en gammal F.S. Annars sid 94, 7.31 (7.30a i halvgamla blå)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_r \simeq 0 \\ \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h} \\ \sigma_z = \dfrac{pa}{2h} \end{cases}$$

Samband $\varepsilon \Leftrightarrow \sigma$ via Hookes lag $\Rightarrow$ F.S. 3.1 $\Rightarrow$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\Big[\underbrace{\sigma_r}_{=0} - \nu\underbrace{(\sigma_\varphi + \sigma_z)}_{\frac{3pa}{2h}}\Big] = -\frac{3\nu pa}{2Eh}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\Big[\sigma_z - \nu(\underbrace{\sigma_r}_{0} + \underbrace{\sigma_\varphi}_{2\sigma_z})\Big] = \frac{\sigma_z}{E}(1-2\nu) = \frac{(1-2\nu)pa}{2Eh}$$

b) Sökt: Diameterökningen av röret, Δd

Lösning: Obelastat: $d_0 = \dfrac{2\pi a}{\pi}$ ← omkrets ← dividera med π för omkrets → diameter

Lastat: $d_1 = \dfrac{2\pi a \cdot (1+\varepsilon_\varphi)}{\pi}$ ← omkretsökning

$$\Delta d = d_1 - d_0 = 2a\varepsilon_\varphi$$

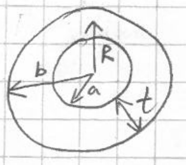
Hookes lag $\Rightarrow$ {F.S. 3.1} $\Rightarrow$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\Big[\underbrace{\sigma_\varphi}_{2\sigma_z} - \nu(\underbrace{\sigma_r}_{0} + \sigma_z)\Big] = \frac{\sigma_z}{E}[2-\nu] = \frac{(2-\nu)pa}{2Eh}$$

$$\Delta d = \frac{2a(2-\nu)pa}{2Eh} = \frac{(2-\nu)pa^2}{Eh}$$

2.8.11. Jämför Ångpanneformlerna för tunnväggigt rör med exakt lösning (tjockväggigt)

└ för σ_φ



Jämför för olika kvoter $\frac{R}{t} = x$, $x \in \{2, 5, 10$ och godtyckligt $x\}$

Jämför vid innerkanten

Ångpanneformeln $\Rightarrow \sigma_\varphi^{Å} = \frac{pR}{t} = px$ (för att jämföra senare)

(F.S. sid 94, 7.30a)

Allmän/exakt lösning: F.S. 7.27 sid 93

Ingen temperaturlast $\Rightarrow T(r) = I(r) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\varphi = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \end{cases}$$

radiell koordinat, har inget med radien att göra.

Randvillkor: $\begin{cases} \sigma_r(R - t/2) = -p \\ \sigma_r(R + t/2) = 0 \end{cases}$ (tryck på insidan)

färdig lösning för just dessa randvillkor

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Lames formler för tjockväggiga rör, F.S. 7.30, sid 94 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma_\varphi(r) = p\frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) = p\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right) \Big/ \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)$$

Sätt in $r = a$, inför $c = \frac{b}{a} = \frac{R + t/2}{R - t/2} = \frac{R/t + 1/2}{R/t - 1/2} = \frac{x + 1/2}{x - 1/2}$

$$\Rightarrow \sigma_\varphi(a) = p\frac{c^2 + 1}{c^2 - 1}, \quad c = \frac{x + 1/2}{x - 1/2}, \quad x = \frac{R}{t}$$

Jämförelse: $\frac{\sigma_\varphi - \sigma_\varphi^{Å}}{\sigma_\varphi} = \ldots = \frac{1}{4x^2 + 1}$

x	relativ skillnad:		ok?
2	1/17	≈ 6%	Förvånandsvärt bra, kan vara ok
5	1/101	≈ 1%	Helt ok!
10	1/401	≈ 0,25%	Rent av fantastiskt!