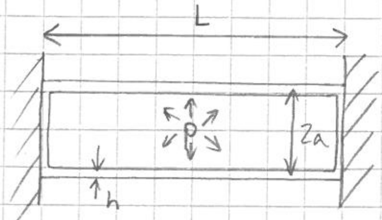
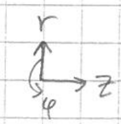
2.9.1.



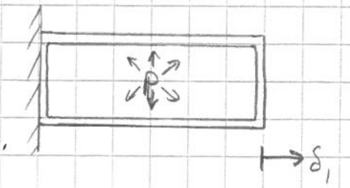


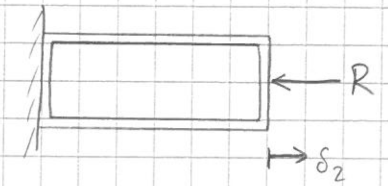
$h << a$

E, ν, Lyder Hookes lag

Sökt: Reaktionskraft i väggen om trycket går från $0 \rightarrow p$.
+ Huvudspänningar

Lösning: Frilägg höger vägg och dela upp i två elementar fall

① 

② 

Stela väggar $\Rightarrow$ $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Leftrightarrow \delta_1 = -\delta_2$

$$\delta_2 = \varepsilon_z L = \frac{\sigma_z}{E} L = \frac{(-R)}{EA} L \Rightarrow -\delta_2 = \delta_1 = \frac{RL}{EA} \Leftrightarrow R = \frac{\delta_1 EA}{L}$$

$$\delta_1 = \overset{?}{\varepsilon_z} L \quad \text{(Behöver veta } \varepsilon_z\text{)}$$

Hookes lag $\Rightarrow$ $\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\overset{?}{\sigma_z} - \nu(\overset{?}{\sigma_r} + \overset{?}{\sigma_\varphi})\right]$ (F.S. 3.1, sid 22)

Behöver spänningar $\Rightarrow$

Ångpanneformlerna $\Rightarrow$ (F.S. 7.30a, sid 94)

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \sigma_z = \dfrac{pa}{2h} \\ \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h} = 2\sigma_z \end{cases}$$

Spänningar kända $\Rightarrow$ $\underset{\text{I}}{\varepsilon_z \text{ känd}}$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{II}}{\delta_1 \text{ känd}}$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{III}}{R \text{ känd}}$

I: $\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(0 + 2\sigma_z)\right] = \dfrac{\sigma_z}{E}(1-2\nu) = \dfrac{pa}{2hE}(1-2\nu)$

II: $\delta_1 = \varepsilon_z L = \dfrac{paL}{2hE}(1-2\nu)$

III: $R = \dfrac{\delta_1 EA}{L} = \dfrac{paA}{2h}(1-2\nu) = \underline{\underline{\pi p a^2 (1-2\nu)}}$

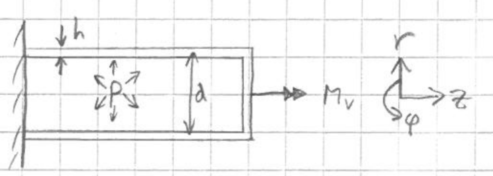
Reaktionskraften ger bara en extra $\sigma_{z,2} = \dfrac{-R}{A} = (2\nu - 1)\dfrac{pa}{2h}$

$\Rightarrow$ $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ fortfarande huvudspänningar.

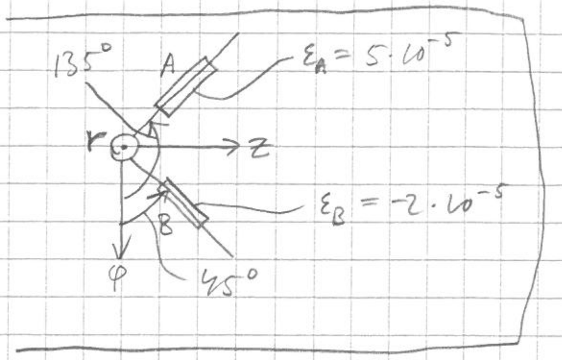
och $\sigma_{z,tot} = \dfrac{pa}{2h} + (2\nu-1)\dfrac{pa}{2h} = \nu\dfrac{pa}{h}$, ν ligger mellan 0–0,5 för vanliga material

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_1 = \frac{pa}{h}, \quad \sigma_2 = \nu\frac{pa}{h}, \quad \sigma_3 = 0}}$$

2.9.6.



På ytan:



$h = 2\,mm$
$d = 50\,mm \Leftrightarrow a = 25\,mm$
$E = 200\,GPa$ } stål
$\nu = 0{,}3$ }

Sökt: Vad är p och M_v?

Lösning: Börja att titta på töjningen och se vad vi har

$$\varepsilon_A = \underset{\text{(F.S. 2.21, s.18)}}{\varepsilon(135^\circ)} = \varepsilon_\varphi \underbrace{\cos^2(135^\circ)}_{1/2} + \varepsilon_z \underbrace{\sin^2(135^\circ)}_{1/2} + \gamma_{\varphi z}\underbrace{\cos(135^\circ)\sin(135^\circ)}_{-1/2} = 5\cdot 10^{-5} \quad (1)$$

$$\varepsilon_B = \varepsilon(45^\circ) = \varepsilon_\varphi \underbrace{\cos^2(45^\circ)}_{1/2} + \varepsilon_z \underbrace{\sin^2(45^\circ)}_{1/2} + \gamma_{\varphi z}\underbrace{\cos(45^\circ)\sin(45^\circ)}_{1/2} = -2\cdot 10^{-5} \quad (2)$$

$(2)-(1) \Rightarrow \gamma_{\varphi z} = -7\cdot 10^{-5}$

$(1)+(2) \Rightarrow \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 3\cdot 10^{-5}$

Låt oss nu kolla på de laster som orsakar töjningarna: (I) Tryck
(II) Vridning

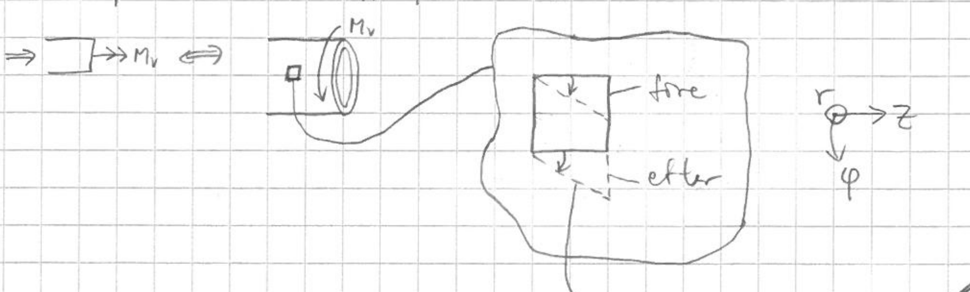
(I) inre tryck ⇒ ångpanneformlerna ⇒
F.S. 7.31, s.94
(7.30a i gamla)

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \sigma_z = \dfrac{pa}{2h} \\ \sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h} = 2\sigma_z \end{cases}$$

(II) vridning (tunnväggigt) $\Rightarrow \tau = G\vartheta a = \left\{\vartheta = \dfrac{M_v}{GK}\right\} = \dfrac{M_v a}{K} = \{K = 2\pi a^3 t\} = \dfrac{M_v}{2\pi a^2 h}$

(F.S. 6.79 s.75; 6.78 s.73 i gamla) (F.S. 6.75, s.75; 6.74, s.73 i gamla) (F.S. 6.80, s.76; 6.79, s.74 i gamla)

osäker på om det är $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$ eller τ_{zr}?



$\tau = \tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z}$

linjen rör sig från z, närmar sig φ.

(+) $\tau_{\varphi z}$

Så totalt: $\sigma_r = 0$, $\sigma_\varphi = \dfrac{pa}{h}$, $\sigma_z = \dfrac{pa}{2h}$, $\tau_{\varphi z} = \dfrac{M_v}{2\pi a^2 h}$

($\sigma_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{zr} = 0 \Rightarrow$ plan spänning)

2.9.6. Forts. Har spänningar och töjningar, behöver koppla ihop dem $\Rightarrow$

Hookes lag $\Rightarrow$ {F.S. 3.1, s.22} $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left[\underbrace{\sigma_\varphi}_{2\sigma_z} - \nu(\sigma_z + \underbrace{\sigma_r}_{0})\right] = \frac{\sigma_z}{E}(2-\nu) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\underbrace{\sigma_\varphi}_{2\sigma_z} + \underbrace{\sigma_r}_{0})\right] = \frac{\sigma_z}{E}(1-2\nu) \\ \gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\varphi z} \end{cases}$$

(F.S. 3.2, s.22)

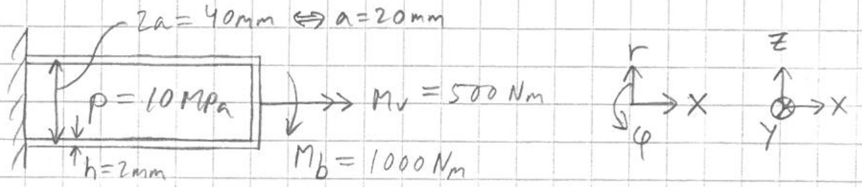
$$\Rightarrow \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \underbrace{3 \cdot 10^{-5}}_{\text{från tidigare}} = \frac{\sigma_z}{E}\left[(2-\nu)+(1-2\nu)\right] = \frac{3\sigma_z}{E}(1-\nu) = \frac{3}{2}\frac{pa}{Eh}(1-\nu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{2Eh(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)}{3a(1-\nu)} \approx \underline{\underline{4{,}6 \cdot 10^5 \text{ Pa}}} \; (= 4{,}6 \text{ Bar eller } 4{,}5 \text{ atm})$$

$$\Rightarrow \gamma_{\varphi z} = \underbrace{-7 \cdot 10^{-5}}_{\text{från tidigare}} = \frac{\cancel{2}(1+\nu)}{E} \underbrace{\frac{M_v}{\cancel{2}\pi a^2 h}}_{\tau_{\varphi z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_v = \frac{\pi a^2 h E}{1+\nu}\gamma_{\varphi z} \approx \underline{\underline{-42 \text{ Nm}}}$$ (minus = vrider åt andra hållet)

2.9.9.



Sökt: Största skjuvspänningen, $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Lösning: Tre separata lastfall, kan lösas individuellt och kombineras så länge materialet är linjärelastiskt.

① Inre tryck, p:

Ångpanneformlerna: (F.S. 7.30a, s.94)

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_x = \frac{pa}{2h} = 50 \text{ MPa} \\ \sigma_\varphi = \frac{pa}{h} = 2\sigma_x = 100 \text{ MPa} \end{cases}$$

② Vridning, M_v:

på samma sätt som i 2.9.6

Tunnväggigt rör $\Rightarrow \tau = \frac{M_v a}{K} = \frac{M_v}{2\pi a^2 h} = \tau_{\varphi x} \approx 100 \text{ MPa}$

$K = 2\pi a^3 h$ (F.S. 6.80, s.76) 6.79, s.74 i gamla

③ Böjning, M_b:

$$\sigma_x = \frac{M_b z}{I} = \frac{M_b z}{\pi a^3 h}$$

$I = \pi a^3 h$ F.S. s.344 (s.332 i gamla)

Eftersom ① och ② belastar lika mycket i varje punkt så borde den största skjuvspänningen ligga där böjningen har störst bidrag: vid $z = \pm a$

$\Rightarrow$ vid $z = +a : \sigma_x \approx 400 \text{ MPa}$
$z = -a : \sigma_x \approx -400 \text{ MPa}$

Totalt: $\sigma_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{xr} = 0 \Rightarrow$ plan spänning, och $\sigma = 0$ en huvudspänning

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \begin{cases} 450 \text{ MPa} & \text{vid } z = +a \\ -350 \text{ MPa} & \text{vid } z = -a \end{cases} \\ \sigma_\varphi = 100 \text{ MPa} \\ \tau_{\varphi x} = 100 \text{ MPa} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S_+} = \begin{pmatrix} 450 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} \text{MPa} \Rightarrow \{\text{eig}(\underset{\sim}{S_+}) \text{ i Matlab}\} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 476,56 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 73,44 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 0 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \tau_{max} \approx 238 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{S_-} = \begin{pmatrix} -350 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} \text{MPa} \Rightarrow \text{— '' —} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 121,22 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -371,22 \text{ MPa} \end{cases} \Rightarrow \tau_{max} \approx \underline{\underline{246 \text{ MPa}}}$$

2.9.10. Forts. Total spänning = 1 + 2

Praktiskt: $\dfrac{p\,a^2}{b^2-a^2} = \begin{Bmatrix} a = 10\,mm \\ b = 20\,mm \end{Bmatrix} = \dfrac{p}{3}$

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = -3 \quad , \quad \left(1-\frac{b^2}{b^2}\right) = 0$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = 5 \quad , \quad \left(1+\frac{b}{b^2}\right) = 2$$

Vid $r = a$ (insidan):

$$\sigma_r = \frac{p\,a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = -p = \underline{\underline{-50\,MPa}}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p\,a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{5}{3}p \approx \underline{\underline{83,3\,MPa}}$$

$$\sigma_x = \frac{4\,M_b\,a}{\pi(b^4-a^4)}\sin\varphi \approx \underline{\underline{8,5\cdot\sin\varphi\,MPa}}$$ (beror på läge)

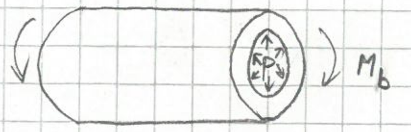
Vid $r = b$ (utsidan):

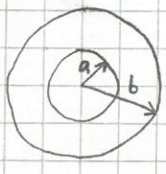
$$\sigma_r = \frac{p\,a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{b^2}\right) = \underline{\underline{0\,MPa}}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p\,a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{b^2}\right) = \frac{2}{3}p \approx \underline{\underline{33,3\,MPa}}$$

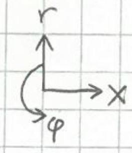
$$\sigma_x = \frac{4\,M_b\,b}{\pi(b^4-a^4)}\cdot\sin\varphi \approx \underline{\underline{17\cdot\sin\varphi\,MPa}}$$

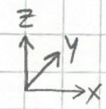
2.9.10.





$a = 10\,mm$
$b = 20\,mm$





Obs! Öppet rör! ($\sigma_x = 0$ från trycklastfallet)

$p = 50\,MPa$
$M_b = 100\,Nm$

Sökt: Spänningar vid inre och yttre randen, dvs vid $r = a$, $r = b$.

Lösning: 2 lastfall, linjärelastiskt material ⇒ dela upp i två separata fall

① inre tryck:

Öppet rör ⇒ $\sigma_x = 0$ (F.S. 7.30 är trevlig, men det är bra att öva!)

Tjockväggig ⇒ F.S. 7.27, sid 93 ⇒ $\Delta T = 0 \Rightarrow T(r) = I(r) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_r = A - \dfrac{B}{r^2} \\ \sigma_\varphi = A + \dfrac{B}{r^2} \end{cases} \quad , A, B \text{ okända konstanter}$$

Randvillkor: $\begin{cases} \sigma_r(a) = -p & \leftarrow \text{Obs! Tecken!} \\ \sigma_r(b) = 0 & \leftarrow \text{yttre tryck (finns ej/försumbart)} \end{cases}$ atmosfärstryck ≈ 0,1 MPa

$$RV2 \Rightarrow A - \frac{B}{b^2} = 0 \Leftrightarrow B = Ab^2 \tag{1}$$

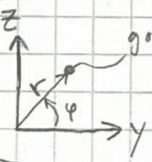
$$RV1 \text{ och } (1) \Rightarrow A - \frac{(Ab^2)}{a^2} = -p \Leftrightarrow A\underbrace{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}_{\frac{a^2}{a^2-b^2}} = -p \Leftrightarrow A = p\frac{a^2}{b^2 - a^2} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_r = A\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_\varphi = A\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \tag{4}$$

Lamés formler, F.S. 7.30, s.94

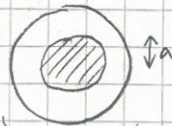
② Böjlast:



godtycklig punkt med koordinater (y, z) alt. (r, φ)

$\Rightarrow z = r\sin\varphi$

$$\sigma_x = \frac{M_b}{I_y}z = \frac{M_b}{I_y}r\sin\varphi$$

$I_y = \{F.S.\ 31.1.3\} =$  $-$  $= \dfrac{\pi}{4}(b^4 - a^4)$

$\underbrace{}_{\frac{\pi b^4}{4}}$ $\underbrace{}_{\frac{\pi a^4}{4}}$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{4M_b \cdot r \cdot \sin\varphi}{\pi(b^4 - a^4)} \tag{5}$$