Kap 5 (5.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.9, 5.14)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Partiklarnas masscentrum $\bar{r}_G = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{m}$ $\bar{r}_G = \dfrac{\int \bar{r}\, dm}{m}$

Cirkelbåge $\bar{y}_G = r \sin\alpha / \alpha$

Cirkelsektor $\bar{y}_G = \frac{2}{3} r \sin\alpha / \alpha$

Bra att lära sig utantill

Triangelskiva $\bar{y}_G = h/3$

Halvklot $\bar{y}_G = 3r/8$

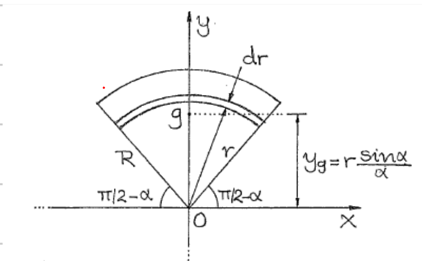
Kon $\bar{y}_G = \dfrac{h}{4}$

Pappus regel $A = 2\pi y_G l$

$V = 2\pi y_G A$

5.2 - Givet: Se figuren, dela in cirkelsektorn i cirkelbågar

Söker: y_G



Lösning

* Välj lämplig koordinatsystem
* Hitta samband mellan ρ & massa & area

$$dm = \rho \, dA \qquad (1)$$

$$\rho = \frac{\text{massa}}{\text{area}} = \frac{m}{R^2 \cdot \alpha} \qquad (2)$$

$$dA = \{\text{betrakta cirkelsektorn}\} = r \cdot 2\alpha \cdot dr \qquad (3)$$

(3) & (2) i (1) $\longrightarrow$ $dm = \frac{m}{R^2 \cdot \alpha} \cdot r\, 2\alpha\, dr = \frac{2mr}{R^2}\, dr$

* Bestäm $\bar{y}_g$ för varje cirkelsektor $\bar{y}_g$

observera hur vi har definierat alpha

$$\bar{y}_G = \frac{1}{m}\int \bar{y}_g \, dm = \frac{1}{m}\int_0^R \frac{2r\sin\alpha}{2\alpha}\,\frac{2mr}{R^2}\, dr$$

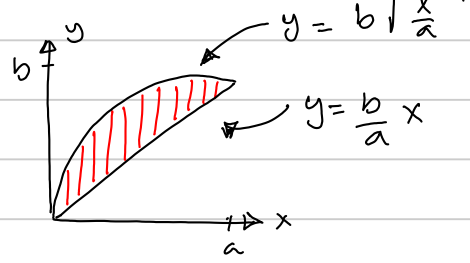
$$= \frac{m\, 2\sin\alpha}{m\, \alpha}\,\frac{1}{R^2}\int_0^R r^2\, dr = \underline{\underline{\frac{2}{3}\, R\, \frac{\sin\alpha}{\alpha}}}$$

* Vi kan dubbelkolla om vi har gjort rätt låt alpha = pi/2, dvs så att vi får en halvcirkel

$\bar{y}_G = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ vilket stämmer överens med tidigare räkningar

5.4 – Givet: se figuren

Sökt: $\bar{y}_G$



Lösning

* Välj ett lämpligt koordinatsystem
* Hitta ett samband mellan ρ & massa & area

$$dm = \rho \, dA \quad (1)$$

$$\rho = \frac{m}{A} = \left\{ A = \int_0^a b\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{b}{a}x \, dx = \frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{a}} x^{3/2} - \frac{b}{a}\frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{2}{3}\frac{b}{\sqrt{a}} a^{3/2} - \frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\right.$$

$$\left. = ba\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{ba}{6} \right\} = \frac{6m}{ba} \quad (2)$$

$$dA = b\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{b}{a}x \, dx \quad (3)$$

(2) och (3) i (1) $\quad dm = \frac{6m}{ba}\left(b\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{b}{a}x \, dx\right) = \frac{6m}{a}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\right)$

* Bestäm $\bar{y}_g$

Eftersom vi har med vertikala linjer att göra längs x axeln, se figuren, då måste masscentrum för varje vertikallinje var i mitten alltså

$$y_g = \left(b\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{b}{a}x\right)/2 + \frac{b}{a}x = \frac{b}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{x}{a}\right)$$

y_G = int y_g dm / m

$$y_G = \frac{b}{2m}\int_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{6m}{a}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \frac{x}{a}\right) dx$$

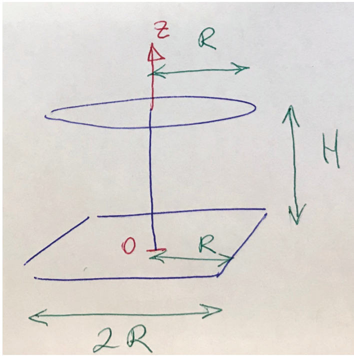
$$= \frac{m}{m}\frac{3}{a}b\int_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{x}{a}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{x}{a}\right) dx =$$ Konjugatregel

$$= \frac{3b}{a}\int_0^a \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \, dx =$$

$$= \frac{3b}{a}\left(\frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2}\Big|_0^a\right) =$$

$$= \frac{3b}{a}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) = \frac{3b}{a}\,\frac{3a - 2a}{6} = \underline{\frac{b}{2}}$$

Uppgift 5.5



Givet: Se figuren, R, H. Homogena kroppar

Söker: Bestäm höjden över basen för den sammansatta kroppens masscentrum

Lösning

- Välj ett lämpligt koordinatsystem. Eftersom vi är bara intresserade av z-komponenten av kroppens masscentrum behöver vi bara definiera z-axeln. Var man sätter noll-nivån är valfritt men eftersom det frågas efter höjden från basen är det smidigast att lägga origo vid kvadraten.
- Betrakta kroppen som en sammansättning av två kroppar, en cirkel och en kvadrat. Låt kropp 1 vara cirkeln och kropp 2 vara kvadraten.
- Bestäm z-komponenten av kroppens masscentrum, Z_g, m.h.a. formeln för en sammansattkropp. Här antar vi att kroppen är så tunna att de är 2 dimensionella.

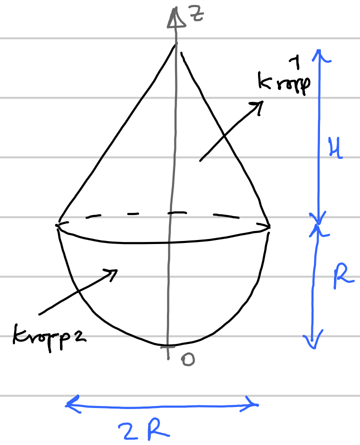
$$Z_1 = H, \qquad A_1 = \pi R^2$$
$$Z_2 = 0, \qquad A_2 = 4R^2$$

$$Z_G = \frac{m_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot Z_2}{m_1 + m_2} = \{m = \rho \cdot A, \qquad \text{homogenkropp}\} = \frac{A_1\, Z_1 + A_2\, Z_2}{A_1 + A_2} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{\pi R^2 + 4R^2} = \frac{\pi \cdot H}{4 + \pi}$$

Svar: höjden över basen för den sammansatta kroppens masscentrum är $\frac{\pi \cdot H}{4+\pi}$

5.6 – Givet: se figuren, R, H

Sökes: z_G och om $R = H$



Lösning

* välj ett lämplig koordinatsystem
* Betrakta kroppen som en sammansättning av två kroppar en kon och en sfär

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{HR^2\pi}{3}$$

* Formeln för en sammansatt kroppsmassa

viktig steg, hoppa inte över det

$$z_G = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m} = \left\{ m = \rho V \text{ , homogen kropp} \right\} = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2}{V}$$

$$= \left\{ z_1 = \frac{h}{4} + R \;;\; z_2 = \frac{5R}{8} \right\}$$

OBS!
1) Beroende på var vi lägger origo, blir koordinaten för Z_i helt olika
2) När det gäller halvklotet, kom ihåg att den är speglad och därför tar vi R- 3R/8

$$= \left(\frac{2\pi R^3}{3} \cdot \frac{5R}{8} + \frac{HR^2\pi}{3} \left(\frac{h}{4} + R \right) \right) / \left(\frac{2\pi R^3}{3} + \frac{HR^2\pi}{3} \right)$$

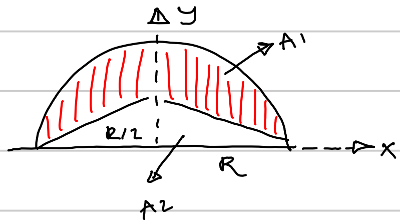
$$= \frac{\frac{5}{4} R^2 + \left(R + \frac{H}{4}\right) H}{2R + H}$$

* Om $R = H$

$$z_G = \frac{\frac{5}{2} R^2}{3R} = \frac{5}{6} R$$

5.9 – Givet: se figuren, homogen cirkelskiva

Söker: y_G för kroppen



Lösning

Ett mindre smart sätt att lösa uppgiften är att göra den som föregående uppgift. I det här fallet vet vi vad $\bar{y}_G$ för en cirkelskiva & triangel är och vi kan använda oss av detta istället.

* Välj ett lämplig koordinatsystem

* Betrakta cirkelskivan som två samansatta kroppar

$$A = A_1 + A_2$$

* Formeln för den sammansatta kroppens masscentrum

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m}$$ där m_i är massan för del i och y_i är masscentrum för del i

$m = \rho A$ (3) insatt i ekv (2) $\longrightarrow$ $y_G = \dfrac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A}$

löser ut y_1: $y_1 = \dfrac{A}{A_1} y_G - \dfrac{A_2}{A_1} y_2$

* Räkna ut dessa area

$A = \dfrac{\pi R^2}{2}$ och $A_2 = \dfrac{R}{2} \cdot \dfrac{2R}{2} = \dfrac{R^2}{2}$

$$A_1 = A - A_2 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\pi - 1)$$

* Använd teorin för att bestämma $\bar{y}_G$ & $\bar{y}_2$

$y_G = \dfrac{4R}{3\pi}$ och $y_2 = \dfrac{h}{3} = \dfrac{R/2}{3} = R/6$

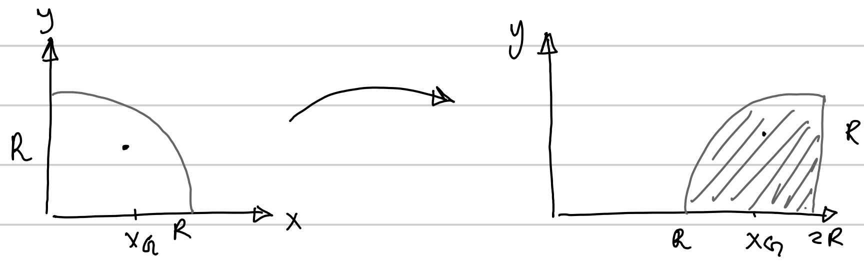
* Insättning

$$y_1 = \frac{\pi R^2/2 \cdot 4R/3\pi - R^2/2 \cdot \frac{R}{6}}{R^2(\pi-1)/2} = \frac{\pi \cdot 4R/3\pi - R/6}{(\pi - 1)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{7R}{6(\pi-1)}}}$$

5.14 – Givet: se figuren

Sökt: rotationskroppens volym



$x_G = 2R - \frac{4R}{3\pi}$

Lösning

* Använd pappus II regel

$$V = 2\pi \cdot y_G \cdot A$$

OBS! 2pi berättar hur många grader vi roterar, y_G masscentrum för snittet och A är arean för snittet

Eftersom kroppen är symmetrisk vet vi att $x_G = y_G = \frac{4R}{3\pi}$

Så t.ex x_G i det här fallet blir $2R - \frac{4R}{3\pi}$, kolla på figuren ovan.

$\bar{y}_G$ Area

$$V = \frac{1}{4}\, 2\pi \cdot \left(2R - \frac{4R}{3\pi}\right) \cdot \frac{\pi R^2}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi R^3}{12}(3\pi - 2)}}$$

delar med 4 eftersom vi har en kvartscirkelskiva