Kap 8 (8.3, 8.5, 8.6, 8.10, 8.17, 8.19, 8.22, 8.33, 8.42, 8.46, 8.48, 8.53,8.58, 8.63, 8.64)

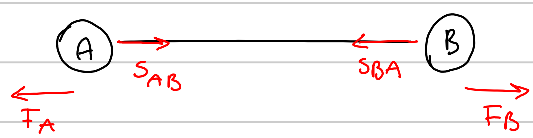
siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Rörelsemängd $\bar{p} = m\bar{v}$

Newtons II lag $\dot{\bar{p}} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = F$ om m konstant $\rightarrow \bar{F} = m\bar{a}$

Tröghetslagen En partikel förblir i sitt tillstånd om och endast om $\sum F = 0$

Lagen om verkan & mot verkan



Rörelsemängdslagen

$\rightarrow$ Naturliga komp: $m(\ddot{s}, \frac{\dot{s}^2}{\rho}, 0) = (F_t, F_n, F_b)$

$\rightarrow$ Cylinder koord: $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}, \ddot{z}) = (F_r, F_\theta, F_z)$

Hur löser man uppgifter med kraftekv?

* Friläggning, rita krafterna
* Lämpligt koordinatsystem
* kraftekv i rätt koordsystem (viktigt att kunna det utan till)
* *använd er av dimensionsanalys för att dubbelkolla att ni har räknat allt rätt*

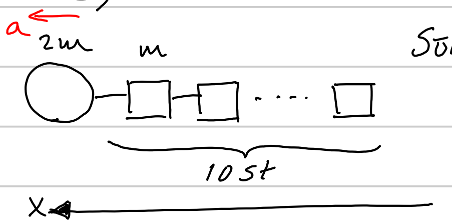
Val av koordinatsystem

Bestäms m.h.a. problemets struktur
* Rätlinjig rörelse: Kartetiska koordinater
* Cirkelbana, med konstant radie: Naturliga komponenter
* Given vinkelhastighet och/eller varierande radie: Cylinder koordinater

8.3)

Givet: se figuren, m, motoreffekt P

Söker: Dragkraften T_1 – T_{10}

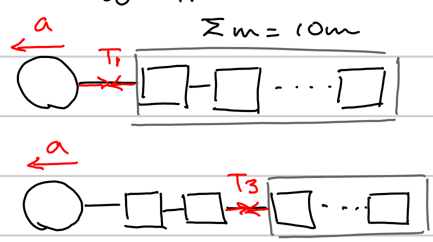


Lösning

* välj kart. koord och frilägg kroppen
* Bestäm tågets acceleration, formulera kraften.

$\leftarrow$: $P = (10m + 2m)\,a \iff a = \frac{P}{12m}$

* Frilägg kroppen för fallet T_1 & T_3.



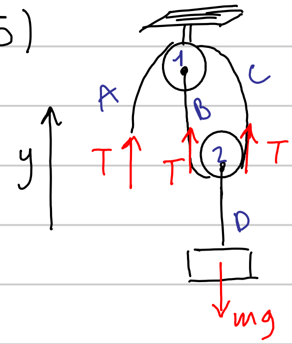
$T_1 = 10\,m\,a = \frac{10m}{12m} P = \frac{10}{12} P$

$T_3 = 8\,m\,a = \frac{8}{12} P$

* Bestäm den slutna formeln T_n

$$T_n = \frac{10-(n-1)}{12} P$$

8.5)



Givet: se figuren, T, m

Sökes: a och dess riktning

Lösning

* välj kart. koords. och fri lägg kroppen så att vi slipper mannens armar

varför blir det så? jmv. för trissa 1 $\Leftrightarrow T_A = T_C$. Jämvikt trissa 2 $\Leftrightarrow T_C = T_B$

* Formulera kalkeln

$$-mg + (2T + T) = ma \iff a = \underline{\underline{\frac{3T}{m} - g}}$$

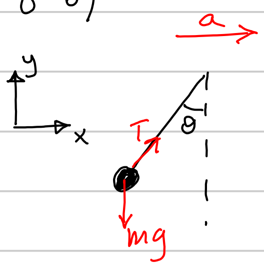
* Bestäm riktningen på a

- $a > 0$ $\quad \frac{3}{m} T > g \iff T > \frac{mg}{3}$ accelerar uppåt
- $a < 0$ $\quad \frac{3}{m} T < g \iff T < \frac{mg}{3}$ accelerar nedåt
- $a = 0$ $\quad \frac{3}{m} T = g \iff T = \frac{mg}{3}$ vila

8.6)

Givet: Se figuren, m, θ

Söker: a, spec om $\theta = 10^\circ$



Lösning

* Välj lämpligt koordsystem och frilägg kroppen

  Tänk på lagen om verkan & mot verkan

* Formulera kraftekv.

$\rightarrow F_x$: $T\sin\theta - ma = 0 \leftrightarrow a = \frac{T}{m}\sin\theta$

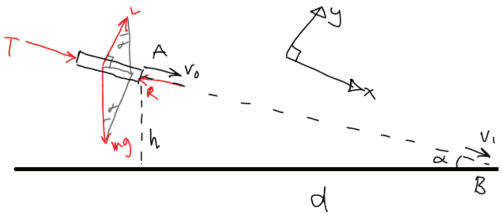
$\uparrow F_y$: $T\cos\theta - mg = 0 \leftrightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$

* Bestäm accelerationen

$$a = \frac{T}{m}\sin\theta = \frac{mg}{m}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \underline{\underline{g\tan\theta}}$$

$$a(\theta = 10^\circ) = g\tan 10^\circ \approx \underline{\underline{0{,}18\,g}}$$

Uppgift 8.10



Givet: Se figuren, massa m, konstant retardation, v_0, landningsfart v_1

Söker: i) Bestäm de aerodynamiska krafterna $D = R - T$ och L, där R är luftmotståndet och L är lyftkraften. ii) Lutningsvinkel α

Lösning

- Välj ett lämpligt koordinatsystem och frilägg flygplanen. Eftersom vi har en rätlinjig rörelse använder vi oss av kartetiska koordinater och låter dem följa planen.

- Formulera kraftekvationen: Inför lutningsvinkel α

$$
\begin{aligned}
F_x: &\quad m\ddot{x} = T - R + mg\sin\alpha = -D + mg\sin\alpha \\
F_y: &\quad m\ddot{y} = L - mg\cos\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad L = mg\cos\alpha
\end{aligned}
$$

  Vi har ingen rörelse i y-riktningen och därför är $\ddot{y} = 0$

- Bestäm lutningsvinkel α

$$\tan\alpha = \frac{h}{d} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{h}{d}$$

- Bestäm $D = T - R$ genom att integrera x-komponenten av kraftekvationen

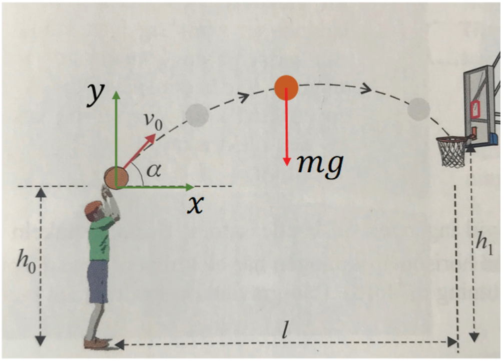
$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x} = m\frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = D + mg\sin\alpha \\
&mvdv = D + mg\sin\alpha
\end{aligned}
$$

  Under retardationen sänks hastigheten från v_0 till v_1 och under den tiden rör sig planet $l = \sqrt{d^2 + h^2}$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l -D + mg\sin\alpha\, dx = \int_{v_0}^{v_1} mv\, dv \\
&(-D + mg\sin\alpha)\cdot l = m\frac{v_1^2 - v_0^2}{2} \\
&D = mg\sin\alpha + m\frac{v_0^2 - v_1^2}{2l}
\end{aligned}
$$

- Svar: Aerodynamiska kraften $D = mg\sin\alpha + m\frac{v_0^2 - v_1^2}{2l}$ och $L = mg\cos\alpha$, där $\alpha = \arctan\frac{h}{d}$ och $l = \sqrt{d^2 + h^2}$

Uppgift 8.17



Givet: Se figuren, kastvinkel α, h_1 och h_0

Söker: Bestäm beloppet av bollens begynnelsehastighet v_0

Lösning

- Välj ett lämpligt koordinatsystem och frilägg bollen.
- Bestäm tiden det tar att bollen når korgen.

$$v_0 \cos\alpha = \frac{l}{t_{\text{korg}}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_{\text{korg}} = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}$$

- Ställ upp kraftekvationen i y-riktningen. Bestäm bollens höjdläge som funktionen av tiden

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} &= -mg \qquad &&\Longleftrightarrow \qquad &&\ddot{y} = g \\
\dot{y} &= -gt + c_1 &&\Longrightarrow &&v_y(0) = c_1 = v_0 \sin\alpha \\
y(t) &= \frac{-gt^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t + C_2 &&\Longrightarrow &&y(0) = C_2 = 0
\end{aligned}$$

- Bestäm v_0. Under t_{korg} har bollen rört sig $h_1 - h_0$ i höjdläge

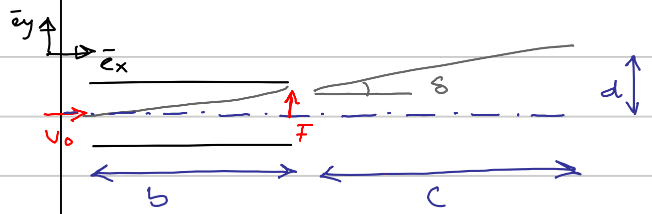
$$\begin{aligned}
y(t_{\text{korg}}) &= -g\frac{l^2}{2\,v_0^2 \cos^2\alpha} + \frac{l\,v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = h_1 - h_0 \\
\frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} &= l\tan\alpha - (h_1 - h_0) \\
\frac{2v_0^2 \cos^2\alpha}{gl^2} &= \frac{1}{l\tan\alpha - (h_1 - h_0)} \\
\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{l^2} &= \frac{g}{2}\left(\frac{1}{l\tan\alpha - (h_1 - h_0)}\right) \\
v_0 &= \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{l\tan\alpha - (h_1 - h_0)}\right)}
\end{aligned}$$

- Svar: $v_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{l\tan\alpha - (h_1 - h_0)}\right)}$

8.19)

Givet: se figuren, $F = eE$, e, E, m, v_0

Söker: d, δ



Lösning

* Frilägg kroppen och fundera på hur partikelbanan ser ut.

viktigt att inse att partikelbanan i y-led är icke linjär så länge vi är i tuben men senare kommer det att vara linjär.

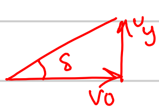
* Bestäm tiden det tar att gå igenom sträcka b & c.

$t_B = \frac{b}{v_0}$ & $t_C = \frac{c}{v_0}$ (Strömfältet påverkar ej hastigheten i x-led)

* Ställ upp kraftekv. i y-riktningen

$$\uparrow \bar{e}_y: \quad m\ddot{y} = F = eE \leftrightarrow \ddot{y} = \frac{eE}{m} \leftrightarrow \dot{y} = v_y = \frac{eE}{m}t + C_1 \quad \text{B.V.}$$

$$v_y(t_B) = \frac{eE}{m} \cdot t_B = \frac{eE}{m}\frac{b}{v_0}$$



$$\tan\delta = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eE}{m}\frac{b}{v_0}\frac{1}{v_0} = \underline{\underline{\frac{eEb}{mv_0^2}}}$$

* Bestäm d.

$$d = S_{y_1} + S_{y_2} = \left\{ \text{vid e-fältet} + \text{konst. hastighet i y} \right\}$$

$$\dot{y} = \frac{eEt}{m} \leftrightarrow y = \frac{eE}{m}\frac{t^2}{2} + C_2 \leftarrow \text{B.V}$$

$$y(t_B) = S_{y_1} = \frac{eE}{2m}\left(\frac{b}{v_0}\right)^2$$

$$S_{y_2} = v_y \cdot t_C = \frac{eE}{m}\frac{b}{v_0} \cdot \frac{c}{v_0} = \frac{eEbc}{mv_0}$$

$$\Longrightarrow d = S_{y_1} + S_{y_2} = \underline{\underline{\frac{eEb}{mv_0^2}\left(\frac{b}{2} + c\right)}}$$

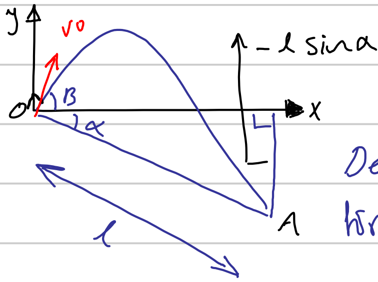
* Varför kan jag inte göra följande?

$\tan\delta = \frac{S_{y_1}}{b}$ $\quad$ $\tan\delta = \frac{d}{b+c}$

För att partikelbanan i tuben i y-riktningen är inte linjär.

8.22) Givet: se figuren, α, v_0

Söker: l



Lösning

Det finns flera sätt man kan lösa den här uppgiften. Ha det klart för er innan ni börjar räkning

* Ställ upp kraft ekv.

$$\rightarrow \bar{e}_x:\quad \ddot{x}=0 \leftrightarrow \dot{x}=v_0\cos\beta = v_0\sin\alpha \leftrightarrow x = v_0\sin\alpha\cdot t + c_1 \quad (\text{B.V})$$

$$x = l\cos\alpha = v_0\sin\alpha\, t \leftrightarrow t = \frac{l}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

hastighet i BV

$$\uparrow \bar{e}_y:\quad \ddot{y}=-g \leftrightarrow \dot{y}=-gt+c_2 = -gt + v_0\sin\beta = -gt + v_0\cos\alpha$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0\cos\alpha\, t + c_3 \quad (=0 \text{ B.V})$$

* Bestäm l genom att sätta $t=\frac{l}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ i uttrycket för y

$$y(t) = y\left(\frac{l}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = -\frac{g}{2}\frac{l^2}{v_0}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + v_0\cos\alpha\cdot\frac{l}{v_0}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -l\sin\alpha$$

$$-\frac{g}{2}\frac{l^2}{v_0}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + l\cos^2\alpha = -l\sin^2\alpha$$

$$l(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = \frac{g}{2}\frac{l^2}{v_0^2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \{l\neq 0\}$$

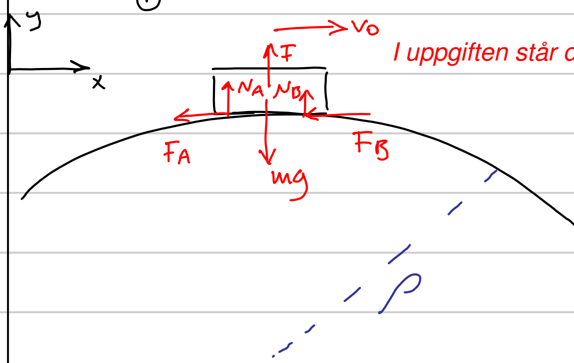
$$l = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{1}{\cos\alpha} = \underline{\frac{2v_0^2}{g}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}}$$

8.33

Givet: se figur 1 & 2, v, ρ, μ

Sökes: $a_1 = \dot{v}_1$ & $a_2 = \dot{v}_2$

①



I uppgiften står det att alla hjul låser sig, det är därför vi får friktion från alla hjul

Lösning

* Frilägg kroppen (vad är F?)

* Ställ kraftekv.

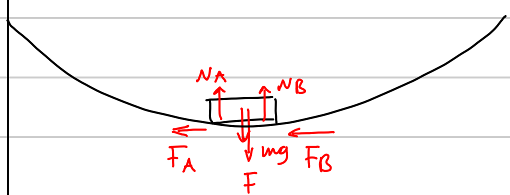
$\uparrow \bar{e}_y$: $N_A + N_B - mg + F = 0$

$$N_A + N_B = mg - \frac{m v_0^2}{\rho} = m\left(g - \frac{v_0^2}{\rho}\right)$$

$\rightarrow \bar{e}_x$: $-ma_1 - (F_A + F_B) = 0$

retarderar

$$ma_1 = (N_A + N_B)\mu \longleftrightarrow \underline{\underline{a_1 = -\mu\left(g - \frac{v_0^2}{\rho}\right)}}$$



* Ställ upp kraftekv.

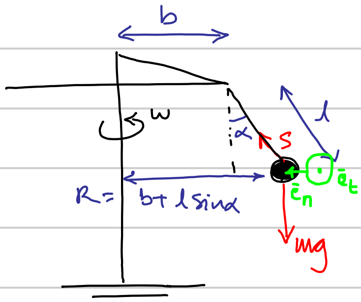
$\uparrow \bar{e}_y$: $N_A + N_B - mg - F = 0$

$$N_A + N_B = mg + \frac{m v_0^2}{\rho}$$

$\rightarrow \bar{e}_x$: $-ma_2 - (F_A + F_B) = -ma_2 - \mu(N_A + N_B) = 0$

$$\underline{\underline{a_2 = -\mu\left(g + \frac{v_0^2}{\rho}\right)}}$$

8.42)



Givet: se figuren, m, α, l

Söker: ω och om ω beror på m

Lösning

* Välj ett lämpligt koordinatsystem & frilägg kroppen

* Bestäm V m.h.a. rotationshastigheten

$$V = \dot{\theta} R = \omega \cdot R = \omega \cdot (b + l \sin\alpha)$$

* Ställ upp kraftekv.

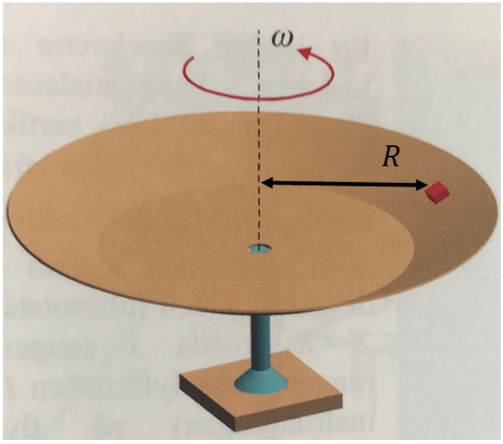
$$\bar{e}_n)\quad \frac{mV^2}{R} = m\,\frac{\omega^2 R^2}{R} = m\,\omega^2 (b + l\sin\alpha) = S\sin\alpha$$

$$\bar{e}_z)\quad -mg = -S\cos\alpha \longrightarrow S = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$\omega^2 = \frac{S\sin\alpha}{m(b + l\sin\alpha)} = \frac{mg}{m}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{1}{b + l\sin\alpha} \longleftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{b + l\sin\alpha}}}}$$

Uppgift 8.46

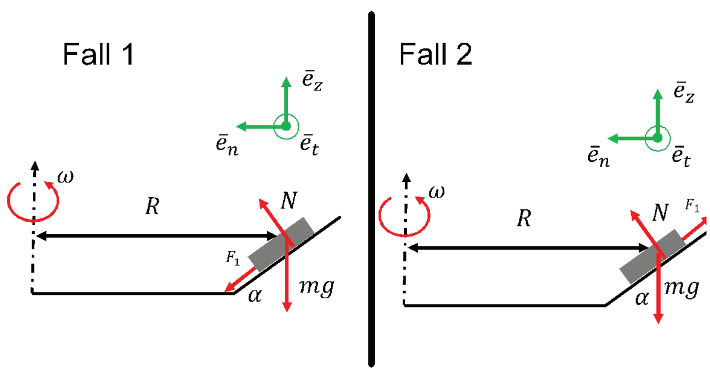


Givet: Se figuren, anordningen roterar kring den vertikala symmetriaxeln, R, lutningsvinkel α, friktionstal μ

Söker: Bestäm den största och minsta vinkelhastigheten ω för vilket partikeln kommer att vara i vila relativt den roterande skivan

Lösning

- Låt oss tänka intuitivt. Hur kommer det sig att det kan finnas två vinkelhastigheter men ändå att partikeln står still relativt ytan.
  1) Fall 1: $(\lim \omega \to \infty)$ Vid tillräcklig hög vineklhastighet vill partikeln flyga iväg och friktionskraften verkar för att hålla partikeln nere.
  2) Fall 2: $(\omega = 0)$ Om det inte finns någon rotation kommer partikeln att vilja glida ner och friktionskraften verkar för att hålla partikeln uppe.
- Frilägg kroppen för de olika fallen och välj ett lämpligt koordinatsystem. Observera att i de olika fallen får friktionskraften F_1 olika tecken. När det gäller val av koordinatsystem har vi en cirkulär rörelse och därför väljer vi naturliga komponenter.



Fall 1

- Projiciera kraftekvationen på normal- och z-riktningen.

$$\bar{e}_n : \quad \frac{mv^2}{R} = N \sin\alpha + F_1 \cos\alpha$$

$$\bar{e}_z : \quad 0 = -mg + N\cos\alpha - F_1 \sin\alpha$$

Fritionskraften precis innan glidning är $F_1 = \mu N$ och hastigheten $v = \omega R$

- Bestäm normalkraften

$$mg = N\cos\alpha - F_1\sin\alpha = N\cos\alpha - N\mu\sin\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

- Bestäm $\omega_{\max}$

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= \frac{m\omega_{\max}^2 R^2}{R} = N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \\ m\omega_{\max}^2\, R &= \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\sin\alpha + \mu\cos\alpha \\ \omega_{\max} &= \sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Fall 2

- Projiciera kraftekvationen på normal- och z-riktningen.

$$\begin{aligned} \bar{e}_n: &\qquad \frac{mv^2}{R} = N\sin\alpha - F_1\cos\alpha \\ \bar{e}_z: &\qquad 0 = -mg + N\cos\alpha + F_1\sin\alpha \end{aligned}$$

Fritionskraften precis innan glidning är $F_1 = \mu\, N$ och hastigheten $v = \omega\, R$

- Bestäm normalkraften

$$mg = N\cos\alpha + F_1\sin\alpha = N\cos\alpha + N\mu\sin\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

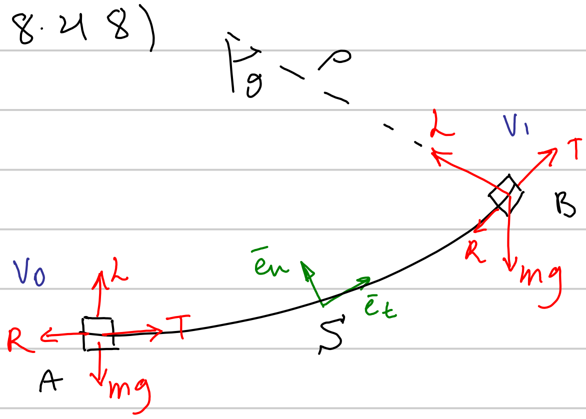
- Bestäm $\omega_{\min}$

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= \frac{m\omega_{\min}^2 R^2}{R} = N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \\ m\omega_{\min}^2\, R &= \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\sin\alpha - \mu\cos\alpha \\ \omega_{\min} &= \sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Svar:

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\right)}, \qquad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R}\left(\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)}$$

8.48)



Givet: se figuren, ρ, θ, $S_{AB} = S$

$v_A = v_0$; $v_B = v_1$

Sökes: $T-R$ & λ

Lösning

* Välj ett lämpligt koordinatssystem & frilägg

Eftersom vi har konstant radie och ingen vinekelhastighet väljer vi naturliga komponenter

* Kraftekvationen i naturliga komp. i punkten B

$\bar{e}_t$: $m\ddot{s}(t) = T - R - mg\sin\theta$

$m\dot{s}(t) = (T - R - mg\sin\theta)t + C_1$ (1) BV: mv_0

$m s(t) = (T - R - mg\sin\theta)\frac{t^2}{2} + mv_0 t + C_2$ (2) BV $= 0$

$\bar{e}_n$: $m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \lambda - mg\cos\theta \iff \lambda = m\frac{v(t)^2}{\rho} + mg\cos\theta$

I punkten B är hastigheten lika med v_1. $\iff \boxed{\lambda = \frac{mv_1^2}{\rho} + mg\cos\theta}$

* Bestäm tiden det tar från A till B

(1) $m\dot{s}(t_B) = mv(t_B) = mv_1 = (T - R - mg\sin\theta)t_B + mv_0$

$\iff t_B = \frac{(v_1 - v_0)m}{(T - R - mg\sin\theta)}$

* Bestäm ett uttryck för $T-R$

(2) $ms(t_B) = mS_{AB} = (T - R - mg\sin\theta)\frac{t_B^2}{2} + mv_0 t_B$

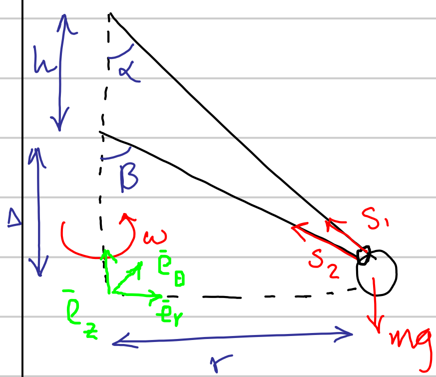
$2mS = (T - R - mg\sin\theta)\frac{(v_1 - v_0)^2 m^2}{(T - R - mg\sin\theta)^2} + 2mv_0\frac{v_1 - v_0}{T - R - mg\sin\theta}$

$$\boxed{T - R = m\frac{v_1^2 - v_0^2}{2S} + mg\sin\theta}$$

8.53

Givet: se figuren, h, m, α, β, spec $\alpha = 30°$ $\beta = 60°$

Sök: $\dot{\theta} = \omega$



Lösning

* Välj ett lämpligt koordinatssystem & frilägg kroppen

Är $|\bar{S}_1|$ & $|\bar{S}_2|$ olika krafter. Har vi tillräckligt med info för att lösa uppgiften om $|\bar{S}_1| \neq |\bar{S}_2|$

* Kraftekvationen i cylinder koordinater

$$\bar{e}_r:\ m(\cancelto{0}{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2) = -S\sin\alpha - S\sin\beta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{S}{mr}(\sin\alpha + \sin\beta) \quad (1)$$

$$\bar{e}_\theta:\ 0 = 0$$

$$\bar{e}_z:\ 0 = -mg + S\cos\alpha + S\cos\beta \iff S = mg\frac{1}{\cos\alpha + \cos\beta} \quad (2)$$

* Bestäm r givet endast α, β, h

$$\underbrace{\frac{r}{\tan\beta}}_{=\Delta} + h = \frac{r}{\tan\alpha} \rightarrow r\underbrace{\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right)}_{=\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}} = h$$

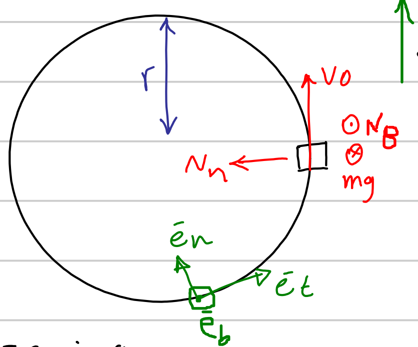
$$r = h\cdot\frac{(\tan\alpha\cdot\tan\beta)}{\tan\beta - \tan\alpha} \quad (3)$$

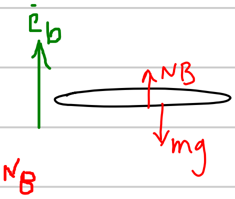
* Bestäm $\omega = \dot{\theta}$

(3) & (2) i (1)
$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{mg}{mh}\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}}}$$

$$\dot{\theta}\Big|_{\substack{\alpha = 30° \\ \beta = 60°}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{h}}$$

8.58)





Givet: se figurerna, r, μ, v_0

sökt: Sträcken då hastigheten går från v_0 till 0

Lösning_

* välj ett lämpligt koordinatsystem och frilägg

viktigt att förstå varför vi väljer nat. komp & olika normalkrafter som vi har. vi vill i slutändan ha ett S och då för kan vi inte ha cyl. koord.

* kraftekvationen i cylinderkoordinater

$$\bar{e}_t: \quad m\ddot{s} = -\mu N = -\mu\sqrt{N_n^2 + N_B^2} \quad *$$

$$\bar{e}_n: \quad \frac{m\,v(t)^2}{\rho} = N_n \quad \overset{*}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{s} = -\mu\sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho}\right)^2 + (mg)^2} = -\mu m\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + g^2} \quad **$$

$$\bar{e}_b: \quad 0 = N_B - mg$$

* Bestäm S då V går från v_0 till stilla.

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = mv\frac{dv}{ds} \overset{**}{=} -\mu m\sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + g^2}$$

$$v\frac{dv}{ds}\cdot\rho = -\mu\sqrt{v^4 + g^2r^2} \quad ***$$

$$\frac{v}{\sqrt{v^4+g^2r^2}}\,dv = -\frac{\mu}{r}\,ds \iff \int_{v_0}^{0}\frac{v}{\sqrt{v^4+g^2r^2}}\,dv = -\frac{\mu}{r}\int_0^S ds$$

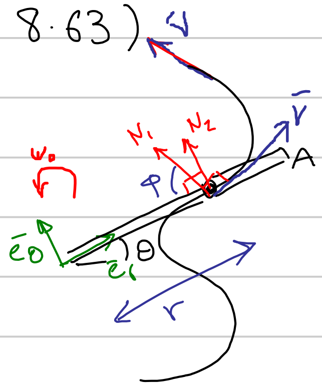
$$\int_{v_0}^{0} \frac{v}{\sqrt{v^4+g^2r^2}}\,dv = -\frac{\mu}{r}\int_0^S dS \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{variabelbyte} \\ t = v^2 \\ dt = 2v\,dv\end{array}\right\}$$

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^2+g^2r^2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left(t+\sqrt{t^2+g^2r^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(v^2+\sqrt{v^4+g^2r^2}\right)\Big|_{v_0}^{0} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln gr - \ln\left(v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2r^2}\right)\right) = -\frac{\mu}{r}S$$

$$S = \frac{r}{2\mu}\left(\ln\left(v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2r^2}\right) - \ln gr\right) = \boxed{\frac{r}{2\mu}\ln\left(\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+g^2r^2}}{gr}\right)}$$

8.63)



Givet: Se figuren, $r = c - b\cos\theta$, $\dot\theta$

Söker: N_1 (från spåret), N_2 (från armen)

Lösning

* välj ett lämpligt koord. syst & fundera noggrann på riktningen av krafterna N_1 & N_2.

$\bar{N}_2 \perp \bar{e}_r \qquad \bar{N}_1 \perp \bar{v}$

* Beräkna $\bar{v}$ & $\bar{e}_v$

$$\bar{v} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot\theta\,\bar{e}_\theta = \frac{d}{dt}(c - b\cos\theta)\bar{e}_r + (c - b\cos\theta)\dot\theta\,\bar{e}_\theta$$
$$= +b\dot\theta\sin\theta\,\bar{e}_r + (c - b\cos\theta)\dot\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$v = \sqrt{b^2\dot\theta^2\sin^2\theta + \dot\theta^2 c^2 - 2bc\dot\theta^2\cos\theta + b^2\dot\theta^2\cos^2\theta}$$

$$= \dot\theta\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}$$

$$\bar{e}_v = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{\cancel{\dot\theta}(b\sin\theta\,\bar{e}_r + (c - b\cos\theta)\,\bar{e}_\theta)}{\cancel{\dot\theta}\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}}$$

* Kraftekv i cyl. koord

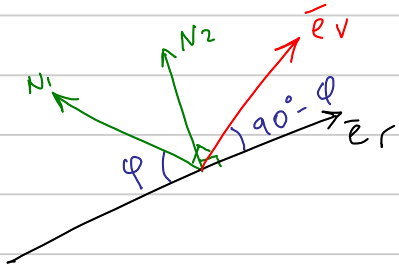
$$\bar{e}_r: m(\ddot{r} - r\dot\theta^2) = m(b\dot\theta^2\cos\theta - c\dot\theta^2 + b\dot\theta^2\cos\theta) = -N_1\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N_1 = m\dot\theta^2\frac{(-2b\cos\theta + c)}{\cos\varphi}}$$

$$\bar{e}_\theta: m(\cancel{r\ddot\theta}^{\,0} + 2\dot{r}\dot\theta) = 2bm\sin\theta\,\dot\theta^2 = N_2 + N_1\sin\varphi \Leftrightarrow$$

$$\boxed{N_2 = -N_1\sin\varphi + 2bm\dot\theta^2\sin\theta}$$

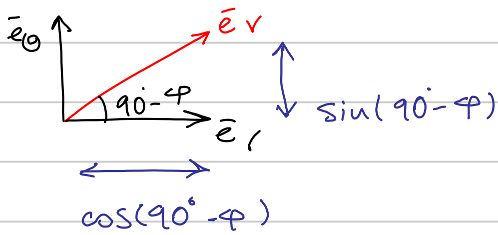
* Bestäm $\cos\varphi$ och $\sin\varphi$ mha $\bar{e}_v$



Från figuren till vänster ser vi att

* $\sin(90°-\varphi) = \cos\varphi = \bar{e}_v \text{ proj } \bar{e}_\theta = \bar{e}_v \cdot \bar{e}_\theta$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{c - b\cos\theta}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta}}}$$

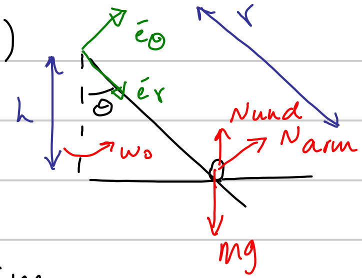


* $\cos(90°-\varphi) = \sin\varphi = \bar{e}_v \text{ proj } \bar{e}_r = \bar{e}_v \cdot \bar{e}_r$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{b\sin\theta}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\theta}}}$$

Kommentar: Förhållanden mellan φ & θ kommer inte att ändras under banan. Däremot riktningen på N_1 kommer att ändras och därmed påverka tecknet i kraftekvationen. Detta förklarar varför jag har fått ett minustecken i uttrycket för N_2.

8.64)



Givet: Se figuren, m, θ, $\dot{\theta} = \omega$

Söker: $N = N_{und}(\theta)$

Lösning

* Välj ett lämpligt koord.-s. Frilägg kroppen. N_{und} = normalkraft från underlaget och N_{arm} är normalkraften från armen

* Bestäm ett uttryck för radien r.

$$\cos\theta = \frac{h}{r} \longleftrightarrow r = \frac{h}{\cos\theta} \qquad \theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

* Ställ upp kraftekv i cylinderkoordinater

$$\dot{r} = \frac{h \sin\theta\, \dot{\theta}}{\cos^2\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{h\dot{\theta}^2 \cos\theta \cos^2\theta - h\dot{\theta}\sin\theta\, 2\cos\theta \sin\theta\, \dot{\theta}}{\cos^4\theta} = h\dot{\theta}^2 \frac{\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}$$

$$\bar{e}_r: \; m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(h\dot{\theta}^2 \frac{\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta} - \frac{h\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\right) = mg\cos\theta - N_{und}\cos\theta$$

$$N_{und} = mg\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{mh\dot{\theta}^2}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos^3\theta + \sin^2\theta\cos\theta}{\cos^4\theta}\right)$$

$$= mg + mh\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^4\theta}\right)$$

$$= mg + mh\dot{\theta}^2 \frac{\overbrace{\cos^2\theta - 1}^{= -\sin^2\theta}}{\cos^4\theta}$$

$$= mg - mh\dot{\theta}^2 \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} =$$

$$= mg - mh\dot{\theta}^2 \frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta}$$

Svar: Normalkraften från underlaget är $N_{und} = mg - mh\dot{\theta}^2 \dfrac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta}$