Kap 7 (7.2, 7.5, 7.11, 7.13, 7.15, 7.16, 7.17)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Ortsvektor $\bar{r}(t) = x(t), y(t), z(t)$

Hastighet kart. $\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$

acceleration kart. $\bar{a}(t) = \ddot{\bar{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$

Hastighet nat. komp. $\bar{v}(t) = \dot{s}\,\bar{e}_t = v\,\bar{e}_t$

Acceleration nat. komp $\bar{a}(t) = \ddot{s}\,\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\bar{e}_n = \dot{v}\,\bar{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\bar{e}_n$

Krökningsradie $\rho = \frac{|s'^3|}{|r' \times r''|} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

Hastighet cyl. koord. $\bar{v} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\theta}\,e_\theta + \dot{z}\,\bar{e}_z$

Acceleration cyl. koord $\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\bar{e}_\theta + \ddot{z}\,\bar{e}_z$

$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$ & $\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$

d/dΘ(**e**_Θ) = - **e**_r & d/dΘ(**e**_r) = **e**_Θ

Val av koordinatsystem

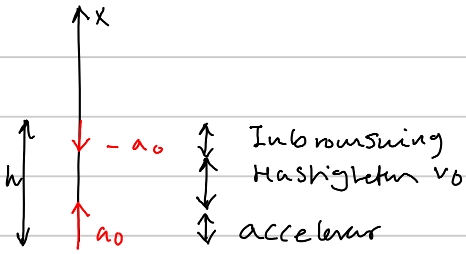
Bestäms m.h.a. problemets struktur
* Rätlinjig rörelse: Kartetiska koordinater
* Cirkelbana, med konstant radie: Naturliga komponenter
* Given vinkelhastighet och/eller varierande radie: Cylinder koordinater

Gyllene tricket

I många problem kan tricket vara att skriva om en derivata m.h.a kedjeregel
v = v(x) → dv/dt = dv/dx * dx/dt = v dv/dt

7.2 - Givet: h, a_0 konstant, $v(0)=0$, $h=300\,m$, $v_0=5\,m/s$, $a_0=2\,m/s^2$

Söker: t



Lösning

* Betrakta x-komp av accelerationen

$\bar{e}_x$: $\ddot{x} = \dot{v} = a_0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} = a_0$

* Acceleration & retardation (inbromsning)

$$dv = a_0 dt \longrightarrow \int_0^{v_0} dv = \int_0^{t_{acc}} a_0\, dt \longrightarrow v_0 = a_0 t_{acc}$$

$$t_{acc} = v_0 / a_0$$

$$\int_{v_0}^{0} dv = \int_0^{t_{ret}} -a_0\, dt \longrightarrow v_0 = a_0 t_{ret}$$

$$t_{acc} = t_{ret} \overset{(*)}{=} \frac{v_0}{a_0}$$ rimligt!

* Betrakta den totala sträckan

$$h = \underbrace{\int_0^{t_{acc}} a_0 t\, dt}_{\text{acceleration}} + \underbrace{\int_0^{\Delta t} v_0\, dt}_{\text{Konstant hastighet}} + \underbrace{\int_0^{t_{acc}} a_0 t\, dt}_{\text{retardation}} = a_0 t_{acc}^2 + v_0 \Delta t$$

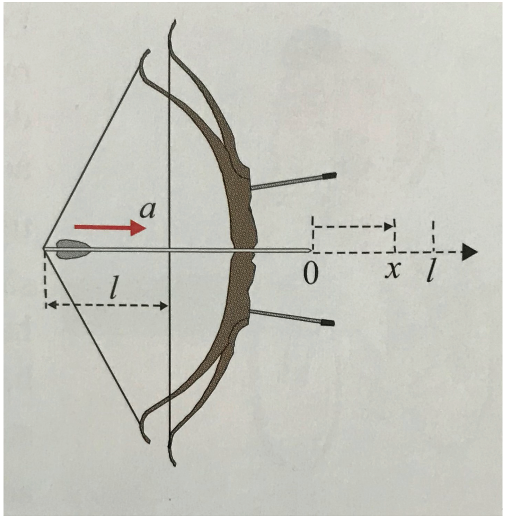
$$v_0 \Delta t = h - a_0 t_{acc}^2 \overset{*}{=} h - a_0 \left(\frac{v_0}{a_0}\right)^2 = h - \frac{v_0^2}{a_0} \Longleftrightarrow \Delta t = \frac{h}{v_0} - \frac{v_0}{a_0}$$

* Bestäm totala tiden

$$t = 2 t_{acc} + \Delta t = 2\frac{v_0}{a_0} + \frac{h}{v_0} - \frac{v_0}{a_0} = \underline{\underline{\frac{h}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}}}$$

$$t = \{\text{insättning}\} = \frac{300\ m}{5\ m/s} + \frac{5\ m/s}{2\ m/s^2} = 60 + 2{,}5\ s = \underline{\underline{62{,}5}}\ s$$

Uppgift 7.5



Givet: Se figuren, linjärt accelerationssamband

$$a = a_0\left(1 - \frac{x}{l}\right), \qquad 0 < x < l$$

Söker: i) Pilsen hastigheten som funktion av läget under accelerationen ii) Bestäm max hastigheten $V_{\max}$, sepc. om a_0=5000 m/s^2 och l = 50 cm

Lösning

- Använder figurens egna koordinatsystem, rimligt att anta välja kartesiska koordinater eftersom vi har linjära rörelse
- Hastigheten och accelerationen är en funktion av tiden men vi vill ändra det till funktion av pilens läge. Därför använder vi oss av gyllene tricket att skriva om acceleration m.h.a. kedjeregel.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \iff vdv = adx \iff \frac{v(x)^2}{2} = \int_0^x adx = \int_0^x a_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)dx$$

$$\frac{v(x)^2}{2} = a_0\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) \iff v(x) = \sqrt{2a_0\left(x - \frac{x^2}{2l}\right)}$$

- Bestäm $v_{\max}$

$$v_{\max} = \frac{dv}{dx} = 0 \iff \frac{dv}{dx} = \sqrt{2a_0}\frac{1 - \frac{2x}{2l}}{2\sqrt{x - \frac{x^2}{2l}}} = 0 \iff x = l$$

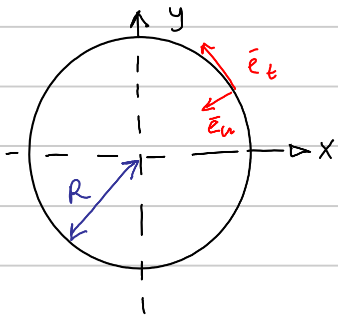
$$v_{\max} = v(l) = \sqrt{a_0 l}$$

  Accelerationen är alltid positiv för alla $0 < x < l$, vilket innebär att hastigheten ökar konstant och maxvärdet kommer att ligga på randen. Med denna förklaring behöver man inte derivera sig fram till lösningen.

- Svar: Pilens hastighet som funktion av sträckan är $v(x) = \sqrt{2a_0\left(x - \frac{x^2}{2l}\right)}$ med maximala hastigheten $v_{\max} = \sqrt{a_0 l}$, med insatta värden, $v_{\max} = 50$ m/s

7.11 – Givet: $v(0) = 0$, $a_t = a_0$, R

Söker: Sträckan då $a_n = a_t$



Lösning

* välj naturliga komponenter, betrakta $\bar{a}_t$

$\bar{a}_t = \dot{v}\,\bar{e}_t = a_0\,\bar{e}_t$

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt}} = a_0 \Leftrightarrow v\frac{dv}{ds} = a_0$$

här avnänds återigen gyllene tricket

* Hitta en formel för hastigheten

$$v\,dv = a_0\,ds \longrightarrow \frac{v^2}{2} = \int_0^S a_0\,ds = a_0 S \longrightarrow v^2 = 2a_0 S$$

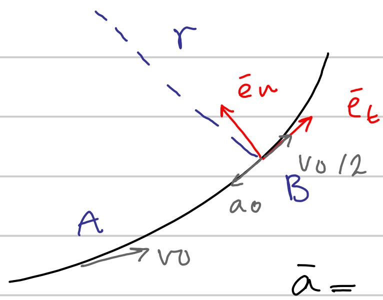
* Bestäm S när $a_n = a_t$

$$|\bar{a}_t| = \left|\frac{v^2}{\rho}\,\bar{e}_n\right|$$

$$a_n = a_t \Leftrightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{2a_0 S}{R} = a_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{S = \frac{R}{2}}}$$

7.13 – Givet: $v_0|_A$ och $v_0/2|_B$; $\rho|_B = r$; $S_{AB} = \ell$

Söker: a_B (absoluta beloppet av acc.)



Lösning

* välj ett lämpligt koord. syst.

* Betrakta accelerationen

$$\bar{a} = \ddot{s}\,\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\bar{e}_n$$

i punkten B

$$\bar{e}_t:\ \ddot{s} = -a_0 \longrightarrow \dot{s} = \frac{ds}{dt} = -a_0 t + C_1 \qquad (1)$$

$$\text{B.V.}\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = C_1 = v_0 \longrightarrow S = -\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t + C_2$$

$$\text{B.V}\ S(t=0) = 0 = C_2 \qquad S = -\frac{a_0 t^2}{2} + v_0 t \quad (2)$$

* Bestäm tidpunkten t_B, dvs när bilen når punkten B

$$(1)\ \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_B} = \frac{v_0}{2} = -a_0 t_B + v_0 \iff t_B = \frac{v_0}{2a_0}$$

* Bestäm accelerationen a_0

$$S_{AB} = S(t_B) = \ell \overset{(2)}{\iff} -\frac{a_0}{2}\left(\frac{v_0}{2a_0}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{2a_0} = \ell$$

$$\frac{1}{2a_0}\left(v_0^2 - \frac{v_0^2}{4}\right) = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{a_0} = \ell \iff a_0 = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{\ell}$$

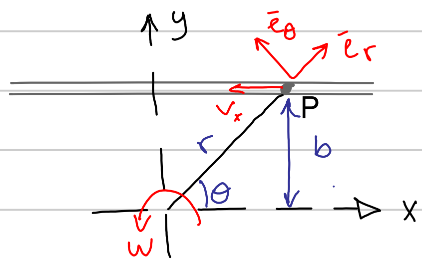
* Bestäm $a(t=t_B)$

$$\bar{a}_b = -a_0\,\bar{e}_t + \frac{v_b^2}{\rho} \longrightarrow a = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)^4\frac{1}{r^2}} = \sqrt{\frac{9}{64}\frac{v_0^4}{\ell^2} + \frac{v_0^4}{16r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9v_0^4 r^2 + 4v_0^4\ell^2}{64\ell^2 r^2}} = \frac{v_0^2}{8\ell r}\sqrt{9r^2 + 4\ell^2}$$

7.15 – Givet: Se figuren, $\dot{\theta} = \omega$

Sökes: P:s hastighet & acc.; när ökar det och när minskar det



Lösningsmetod

$* \ \bar{a} \leftarrow \bar{v} \leftarrow \bar{r} \leftarrow \bar{e}_r \ \& \ \bar{e}_\theta \ \alpha \ \bar{e}_x \ \& \ \bar{e}_y$

Det finns två sätt att lösa det här uppgiften. Jag presenterar båda, det andra sättet är lite svårare att komma på men det underlättar räkningarna avsevärt.

Lösning – (I)

* välj ett lämpligt koordinatsystem
* Betrakta enhetsvektorerna

$$\bar{e}_r = \bar{e}_x \cos\theta + \bar{e}_y \sin\theta$$

$$\bar{e}_\theta = \bar{e}_x \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \bar{e}_y \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\bar{e}_x \sin\theta + \bar{e}_y \cos\theta$$

* Bestäm ortsvektorn & hastigheten

$$\bar{r} = r\bar{e}_r = \frac{b}{\sin\theta} \bar{e}_r$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = b\omega\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\bar{e}_r + \frac{1}{\sin\theta}\bar{e}_\theta\right) \qquad \frac{d\bar{e}_r}{d\theta} = \bar{e}_\theta$$

x-komp $\bar{e}_r$ x-komp $\bar{e}_\theta$

$$v_x = \bar{v}\bar{e}_x = b\omega\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}(-)\sin\theta\right) =$$

$$= b\omega\left(-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = \underline{\underline{\frac{-b\omega}{\sin^2\theta}}}$$

* Bestäm accelerationen

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = b\omega^2\left(-\frac{d}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\bar{e}_r - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{d\bar{e}_r}{dt} + \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\sin\theta}\bar{e}_\theta\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\bar{e}_\theta}{d\theta}\right) = b\omega^2\left(-\left(\frac{-\sin^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\right)\bar{e}_r - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\bar{e}_\theta - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\overbrace{\bar{e}_\theta}^{\frac{d\bar{e}_r}{d\theta}}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sin\theta}\underbrace{\bar{e}_r}_{\frac{d}{d\theta}\bar{e}_\theta}\right) = b\omega^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\bar{e}_r - \frac{1}{\sin\theta}\bar{e}_r + \frac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\bar{e}_r - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\bar{e}_\theta\right)$$

x kompav $\bar{e}_r$ x komp $\bar{e}_\theta$

$$a_x = \bar{a}\cdot\bar{e}_x = b\omega^2\left(2\frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}(-)\sin\theta\right) =$$

$$= 2b\omega^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) =$$

$$= 2b\omega^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

* Hastighet växling

$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos\theta > 0$ & $\sin\theta > 0 \Longrightarrow a_x > 0 \Longrightarrow v_x$ växer

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Longrightarrow \cos\theta < 0$ & $\sin\theta > 0 \Longrightarrow a_x < 0 \Longrightarrow v_x$ minskar

<u>Lösning II</u>

* Betrakta enhetsvektor $\bar{e}_r$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y$$

* Betrakta ortsvektorn $\bar{r}$

$$\bar{r} = r\bar{e}_r = \frac{b}{\sin\theta}\bar{e}_r = \frac{b}{\sin\theta}\cos\theta\,\bar{e}_x + \frac{b}{\sin\theta}\sin\theta\,\bar{e}_y$$

* Bestäm hastigheten v_x

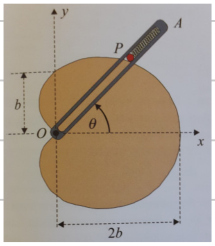
$$v_x = \dot{r}_x = \frac{d}{dt}\frac{b\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-b\sin^2\theta\,\dot{\theta} - b\cos^2\theta\,\dot{\theta}}{\sin^2\theta} = \frac{-b\omega}{\sin^2\theta}$$

* Bestäm accelerationen a_x

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{r}_x = \frac{d}{dt}\frac{-b\omega}{\sin^2\theta} = \frac{b\omega}{\sin^3\theta}2\cos\theta\,\dot{\theta} = 2b\omega^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

d/dt = d/dtheta * dtheta/dx = omega * d/dtheta

7.16



Givet: se figuren. $r = b(1+\cos\theta)$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = 0$

Söker: $\bar{v}$ & $\bar{a}$ i vinklarna $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Lösning:

Vi använder oss av cylinderkordinater och vi antar att $\bar{e}_z = 0$

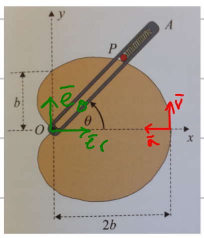
$\dot{r} = -b\sin\theta\,\dot{\theta} = -b\omega\sin\theta$, $\ddot{r} = -b\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \underbrace{b\sin\theta\,\ddot{\theta}}_{=0}$, $\ddot{\theta} = 0$

* $\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta$, $\bar{v} = b\omega(-\sin\theta\,\bar{e}_r + (1+\cos\theta)\bar{e}_\theta)$

* $\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\underset{=0}{\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta$;

$\bar{a} = b\omega^2(-2\cos\theta - 1)\bar{e}_r - 2b\omega^2\sin\theta\,\bar{e}_\theta$

1.

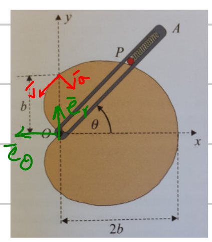


$\theta = 0$ radianer, om vi proj. $\bar{e}_r$ & $\bar{e}_\theta$ på kord.axl., $\bar{e}_r = \bar{e}_x$, $\bar{e}_\theta = \bar{e}_y$

* $\bar{v} = b\omega(-\sin 0\,\bar{e}_x + (1+\cos 0)\bar{e}_y) = 2b\omega\bar{e}_y$

* $\bar{a} = b\omega^2(-2\cos\theta - 1)\bar{e}_x + 2b\omega^2\sin 0\,\bar{e}_y = -3b\omega^2\bar{e}_x$

2.

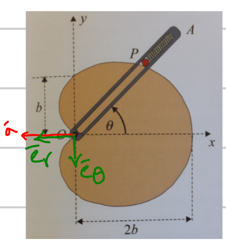


$\theta = \frac{\pi}{2}$ radianer, om vi proj. $\bar{e}_r$ & $\bar{e}_\theta$ på kord.axl., $\bar{e}_r = \bar{e}_y$, $\bar{e}_\theta = -\bar{e}_x$

* $\bar{v} = b\omega(-\sin\frac{\pi}{2}\,\bar{e}_y - (1+\cos\frac{\pi}{2})\bar{e}_x) = -b\omega\bar{e}_y - b\omega\bar{e}_x$

* $\bar{a} = b\omega^2(-2\cos\frac{\pi}{2} - 1)\bar{e}_y + 2b\omega^2\sin\frac{\pi}{2}\,\bar{e}_x = -b\omega^2\bar{e}_y + 2b\omega^2\bar{e}_x$

3.

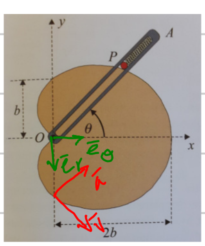


$\theta = \pi$ radianer, om vi proj. $\bar{e}_r$ & $\bar{e}_\theta$ på kord.axl., $\bar{e}_r = -\bar{e}_x$, $\bar{e}_\theta = -\bar{e}_y$

* $\bar{v} = b\omega(\sin\pi\,\bar{e}_x - (1+\cos\pi)\bar{e}_y) = \bar{0}$

* $\bar{a} = b\omega^2(2\cos\pi + 1)\bar{e}_x + 2b\omega^2\sin\pi\,\bar{e}_y = -b\omega^2\bar{e}_x$

4.



$\theta = \frac{3\pi}{2}$ radianer, om vi proj. $\bar{e}_r$ & $\bar{e}_\theta$ på kord.axl., $\bar{e}_r = -\bar{e}_y$, $\bar{e}_\theta = \bar{e}_x$

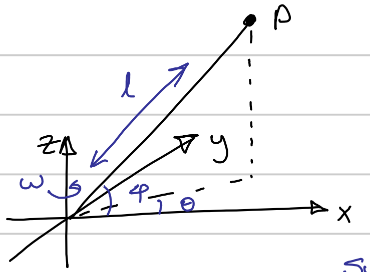
* $\bar{v} = b\omega(+\sin\frac{3\pi}{2}\,\bar{e}_y + (1+\cos\frac{3\pi}{2})\bar{e}_x) = -b\omega\bar{e}_y + b\omega\bar{e}_x$

* $\bar{a} = b\omega^2(+2\cos\frac{3\pi}{2} + 1)\bar{e}_y - 2b\omega^2\sin\frac{3\pi}{2}\,\bar{e}_x = b\omega^2\bar{e}_y + 2b\omega^2\bar{e}_x$

Ett sätt att dubbelkolla sina räkningar är att jämföra riktningen man får genom sina beräkningar med den intuitiva/mekaniska riktningen som jag har rittat med rött. Vi vet att hastigheten är alltid tangentiell och följer banan, accelerationen å andra sidan pekar alltid 90-grader moturs. Tecken på enhetsvektorna som man får bör stämma överrens med den intuitiva riktningen.

7.17 – Givet: se figuren, ω, ℓ och $\dot{\theta}, \varphi, \dot{\ell}$ — $\overbrace{\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\ell}}^{\text{konstant}}$

Söker: hastigheten $\bar{v}$, acceleration $\bar{a}$



Lösning

* välj ett lämplig koordinatsystem

cylinder koordinater

$r = \ell \cos\varphi$; $z = \ell \sin\varphi$

Symmetrisk kring θ led därför behövs det ej i ortsvektorn

* Bestäm ortsvektorn och enhetsvektorerna

$$\bar{r} = r\bar{e}_r + z\,\bar{e}_z = \ell\cos\varphi\,\bar{e}_r + \ell\sin\varphi\,\bar{e}_z$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \sin\theta\,\bar{e}_y$$

$$\bar{e}_\theta = \cos\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right)\bar{e}_x + \sin\left(\theta + \tfrac{\pi}{2}\right)\bar{e}_y = -\sin\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\frac{d\bar{e}_r}{d\theta} = \bar{e}_\theta \quad \text{och} \quad \frac{d}{d\theta}\bar{e}_\theta = -\bar{e}_r$$

Detta behöver ni inte skriva varje gång, om ni redan vet/kan vad derivatorna blir

* Bestäm hastigheten

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\ell}\cos\varphi\,\bar{e}_r - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi\,\bar{e}_r + \ell\dot{\theta}\cos\varphi\,\bar{e}_\theta +$$
$$+ \dot{\ell}\sin\varphi\,\bar{e}_z + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi\,\bar{e}_z$$

$$\underline{\underline{v_r = \dot{\ell}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi}}\,; \quad \underline{\underline{v_\theta = \ell\overset{\dot{\theta}}{\omega}\cos\varphi}}\,; \quad \underline{\underline{v_z = \dot{\ell}\sin\varphi + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi}}$$

* Bestäm accelerationen

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}v_r\,\bar{e}_r + \frac{d}{dt}v_\theta\,\bar{e}_\theta + \frac{d}{dt}v_z\,\bar{e}_z$$

$$= (-\dot{\ell}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\ell}\dot{\varphi}\sin\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,\bar{e}_r + \qquad \frac{d}{dt}v_r\,\bar{e}_r$$
$$+ (\dot{\ell}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}\sin\varphi)\,\omega\,\bar{e}_\theta$$

$$+ (\dot{\ell}\omega\cos\varphi - \ell\omega\dot{\varphi}\sin\varphi)\,\bar{e}_\theta - \ell\omega^2\cos\varphi\,\bar{e}_r \qquad \frac{d}{dt}v_\theta\,\bar{e}_\theta$$

$$+ (\dot{\ell}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\ell}\dot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\,\bar{e}_z \qquad \frac{d}{dt}v_z\,\bar{e}_z$$

$$\bar{a}_r = \underline{\underline{-2\dot{l}\dot{\varphi}\sin\varphi - l\cos\varphi\,(\dot{\varphi}^2+\omega^2)}}$$

$$\bar{a}_\varphi = 2\dot{l}\omega\cos\varphi - 2l\omega\dot{\varphi}\sin\varphi = \underline{\underline{2\omega(\dot{l}\cos\varphi - l\dot{\varphi}\sin\varphi)}}$$

$$\bar{a}_z = \underline{\underline{2\dot{l}\dot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi}}$$