Kap 2 (2.2, 2.4, 2.7, 2.9, 2.10)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Dimensioner & måttsystem

Storhet	Dimension	Enhet
Massa	M	kg
Längd	L	m
Tid	T	s

Uppgift 2.2

Givet: Fortplatningshastigheten v beror på g och vattendjup h

Söker: i) Uttryck för hastighet ii) hastighet vid $h = 4000$ m

Lösning

- Gör en rimlig ansats: C är en dimensionslös konstant

$$v = Cg^{\alpha}h^{\beta}$$

- Dimensionsanalys ger

$$[v] = [g]^{\alpha}\,[h]^{\beta}$$
$$\frac{L}{T} = \left(\frac{L}{T^2}\right)^{\alpha} L^{\beta}$$
$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0.5$$

- Svar: $v = C\sqrt{gh}$ med $h = 4000$ m fås $v(4000) = C \cdot 198$ m/s. Där C är en dimensionslös konstant

Uppgift 2.4

Givet: Beloppet av F beror på r, μ, v och μ har dimensionen $[\mu] = \left[\frac{F}{Av/l}\right]$

Söker: Uttryck för hastigheten

Lösning

- Gör en rimlig ansats: C är en dimensionslös konstant

$$F = C\mu^{\alpha} r^{\beta} v^{\gamma}$$

- Bestäm dimensionen av μ och F

$$[F] = M\,L\,T^{-2}$$
$$[\mu] = \left[\frac{F}{Av/l}\right] = \left[\frac{F\,l}{A\,v}\right] = \frac{M\,L\,T^{-2}\,L}{L^2 \cdot L\,T^{-1}} = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$

- Dimensionsanalys ger

$$[F] = [\mu]^{\alpha}\,[r]^{\beta}\,[v]^{\gamma}$$
$$M\,L\,T^{-2} = M^{\alpha}\,L^{-\alpha}\,T^{-\alpha}\,L^{\beta}\,L^{\gamma}\,T^{-\gamma}$$
$$\begin{cases} M : 1 = \alpha \\ L : 1 = -\alpha + \beta + \gamma \longrightarrow \beta + \gamma = 2 \longrightarrow \beta = 1 \\ T : -2 = -\alpha - \gamma \longrightarrow \gamma = 1 \end{cases}$$

- Svar: $F = C\mu\,r\,v$ där C är en dimensionslös konstant

2.7 - Givets massan beror på σ, r och g och $[\sigma] = [F/A]$

Söker i uttryck för m

Lösning

* Gör en rimlig ansats

$$m = C\sigma^{\alpha} r^{\beta} g^{\gamma} \Leftrightarrow [m] = [\sigma]^{\alpha} [r]^{\beta} [g]^{\gamma}$$

$$= \left\{ \sigma = \frac{F}{A} = \frac{N}{A} = kg \frac{m}{s^2} \frac{1}{m^2} = \frac{kg}{s^2 m} \Leftrightarrow [\sigma] = M T^{-2} L^{-1} \right\}$$

$$= M^{\alpha} T^{-2\alpha} L^{-\alpha} L^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma} = M$$

* Identifiera termer

M: $1 = \alpha$

T: $0 = -2\alpha - 2\gamma \Leftrightarrow \gamma = -1$

L: $0 = -\alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \beta = 2$

$$m = C \frac{\sigma r^2}{g}$$ där C är dimensionslös konstant

2.9 – Givet $\frac{v^2}{mg}$ beror på r, ρ_{luft}
mg ← tyngd

Söker sambandet för v

* Rimlig ansats

$$\frac{v^2}{mg} = C r^{\alpha} \rho^{\beta} \Leftrightarrow \left[\frac{v^2}{mg}\right] = [r]^{\alpha} [\rho]^{\beta} = \left\{ \rho = \frac{kg}{m^3} ; g = \frac{m}{s^2} \right\}$$

$$L^2 T^{-2} M^{-1} L^{-1} T^2 = L^{\alpha} M^{\beta} L^{-3\beta}$$

* Identifiera termer

L: $2 - 1 = \alpha - 3\beta \overset{I}{\Leftrightarrow} 1 = \alpha + 3 \Leftrightarrow \alpha = -2$

T: $0 = 0$

M: $-1 = \beta$ I

$$\frac{v^2}{mg} = C \frac{1}{r^2} \frac{1}{\rho_{luft}} \Leftrightarrow \underline{\underline{v = C \frac{1}{r} \sqrt{\frac{mg}{\rho_{luft}}}}}$$ där C är en dimensionslös konstant

2.10

Lösning

Från uppgiften vet man att $T = f(a, M_s, G)$ där

a: halva storaxellängd $[L]$; M_s: solens massa $[M]$; G: gravitationskonst.

och T: omloppstiden $[T]$

OBS! M_s är solens massa & M dimensionen av den

* Bestäm dimensionen av G m.h.a. dimensionsanalys

För att kunna besvara frågan behöver vi dim G

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \longrightarrow M L T^{-2} = [G]\, M \cdot M \cdot L^{-2} \longrightarrow [G] = M^{-1} \cdot L^{3} \cdot T^{-2}$$

* Bestäm dimensionen av tau: C är en dimensionslöskonstant

$$T = f(a, M_s, G) \longrightarrow T = C\, a^{x} M_s^{y} G^{z}$$

$$T = C [a]^{x} [M_s]^{y} [G]^{z} = C L^{x} M^{y} M^{-z} L^{3z} T^{-2z}$$

$$\begin{cases} T;\ 1 = -2z \longrightarrow z = -1/2 \\ M;\ 0 = y - z \longrightarrow y = 1/2 \\ L;\ 0 = x + 3z \longrightarrow x = 3/2 \end{cases}$$

Svar $T = C \dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{G M_s}}$ där C är en konstant som inte kan bestämmas m.h.a. dim. analys.