Kap 3 (3.3, 3.5, 3.6, 3.7)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

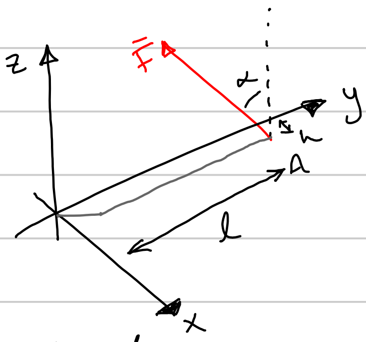
Moment på en punkt P av en kraft F $\qquad \bar{M}_P = \bar{r}_{PA} \times \bar{F}$

OBS ! Kraftmoment ändras ej om kraften förflyttas längs sin verkningslinje

Kraftmoment map på en axel $\qquad M_\lambda = \bar{M}_P \cdot \bar{e}_\lambda$

3.3 - Givet: se figuren $F = P$ & $\bar{F}$ // xz-planet

Sökes $\bar{M}_0$



Lösning

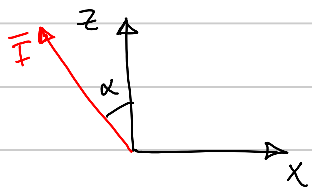
* Bestäm $\bar{F}$

$\bar{F} = P(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$

? Behöver vi verkligen veta vad $\bar{e}_F$ är?

Nej $|\bar{F}| = p$ för $\forall \alpha$

zx- planet



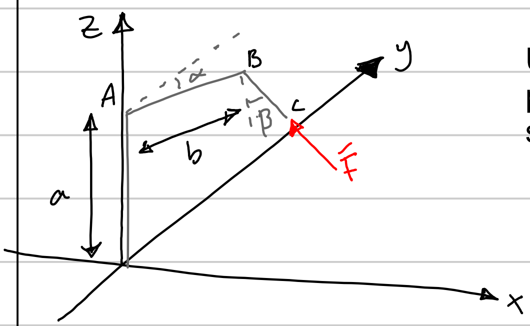
* Räkna ut $\bar{M}_0$

$$\bar{M}_0 = \bar{r}_{OA} \times \bar{F} = (0, \ell, -h) \times p(-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$$

$$= p \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & \ell & -h \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} \ell\cos\alpha \\ h\sin\alpha \\ \ell\sin\alpha \end{vmatrix}$$

3.5 – Givet: se figuren, $\bar{F}$, α, β

Söker: $\bar{M}_O$



Lösningsmetod

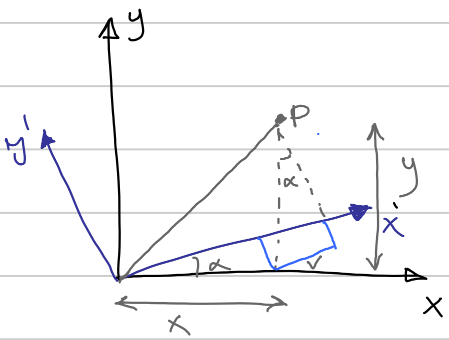
Uppgiften är ganska lik som den förra och man löser det också på samma sätt, dock svårigheten ligger i att axlarna sammanfaller inte med koordinatssystemet.

Lösning –

* Val av koordinatsystem.

oberoende val av koordinatsystem får man slutligen samma svar men det kan förenkla räkningarna.

Vrid y axeln med α s.a. robotens arm sammanfaller med y axeln.



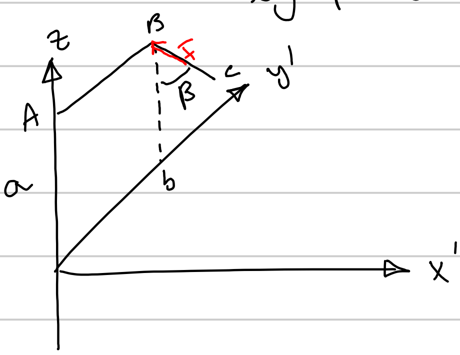
Kortsammanfattning av rotationsmatriser

* likformiga trianglar ger att den andra vinkel bör också vara α
* $x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \rightarrow \bar{e}_{x'} = \cos\alpha\,\bar{e}_x + \sin\alpha\,\bar{e}_y$

  $y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha \rightarrow \bar{e}_{y'} = -\sin\alpha\,\bar{e}_x + \cos\alpha\,\bar{e}_y$
* Rotationsmatrisen blir

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

* Roterar xy-planet med α



* vi kan ju flytta $\bar{F}$ längs verkningslinjen till punkten C.

$$\bar{F} = F(-\sin\beta\,\bar{e}_{x'} + \cos\beta\,\bar{e}_z)$$

$$\bar{R}_{OB} = b\,\bar{e}_{y'} + a\,\bar{e}_z$$

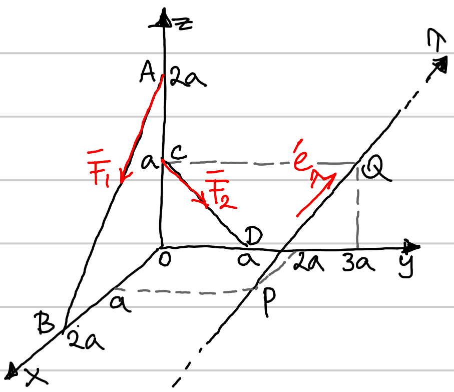
* Bestäm $\bar{M}_O$

$$\bar{M}_O = \bar{R}_{O\beta} \times \bar{F} = F \begin{vmatrix} \bar{e}_x' & \bar{e}_y' & \bar{e}_z \\ 0 & b & a \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix}_{x'y'z} = F(b\cos\beta\,\bar{e}_x' - a\sin\beta\, e_y' + b\sin\beta\,\bar{e}_z)$$

$$= F(b\cos\beta\cos\alpha\,\bar{e}_x + b\cos\beta\sin\alpha\,\bar{e}_y + a\sin\beta\sin\alpha\,\bar{e}_x$$
$$- a\sin\beta\cos\alpha\,\bar{e}_y + b\sin\beta\,\bar{e}_z)$$

$$= F\begin{vmatrix} b\cos\beta\cos\alpha - a\sin\beta\sin\alpha \\ b\cos\beta\sin\alpha - a\sin\beta\cos\alpha \\ b\sin\beta \end{vmatrix}_{xyz}$$

3.6



Givet: $F_1 = 2F$; $F_2 = F$

$A(0,0,2a)$; $B(2a,0,0)$

$C(0,0,a)$; $D(0,a,0)$

$P(a,2a,0)$; $Q(0,3a,a)$

Sökes: M_λ m.a.p λ-axeln

Lösning

Vektor kordinaterna

För att beräkna kraftmomentet behöver vi först och främst definiera beloppet och riktningen av de inblandade vektorerna

- $\bar{r}_{AB} = (2a,0,-2a) = 2a(1,0,-1) \rightarrow \bar{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$
- $\bar{F}_1 = 2F \cdot \bar{e}_{AB} = \frac{2F}{\sqrt{2}}(1,0,-1) = \sqrt{2}F(1,0,-1)$
- $\bar{r}_{CD} = (0,a,-a) = a(0,1,-1) \rightarrow \bar{e}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$
- $\bar{F}_2 = F \cdot \bar{e}_{CD} = \frac{F}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$

Momentekvationen i $\bar{M}_Q$

Vi beräknar den resulterande kraftmoment i punkten Q

$$\bar{M}_Q = \bar{r}_{QA} \times \bar{F}_1 + \bar{r}_{QC} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{e} & \bar{e} \\ 0 & -3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ a \\ F \end{matrix} + \begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{e} & \bar{e} \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ a \\ \frac{F}{\sqrt{2}} \end{matrix} =$$

$$F \cdot a(3\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{18}) + \frac{F \cdot a}{\sqrt{2}}(3,0,0) = F \cdot a\left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{18}\right)$$

Kraftmoment m.a.p λ-axel

- $\bar{r}_{PQ} = (-a,a,a) = a(-1,1,1) \longrightarrow \bar{e}_{PQ} = \bar{e}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

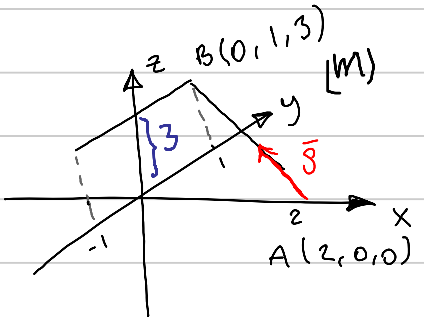
Vi använder oss av sambanden $\bar{M}_\lambda = \bar{r}_{Mp} \cdot \bar{e}_\lambda$ där p är en godtycklig punkt på axeln i det här fallet $\bar{M}_Q$.

$$M_\lambda = \bar{M}_Q \cdot \bar{e}_\lambda = F \cdot a\left(\frac{9}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \sqrt{18}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = \frac{F \cdot a}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{18}\right) = \frac{-F \cdot a}{\sqrt{6}}$$

Svar $M_\lambda = \frac{-F \cdot a}{\sqrt{6}}$

3.7 - Givet: se figuren, $S = 250\,N$

Sökes: $\bar{M}_O$



Lösning

* Bestäm $\bar{e}_{AB}$

$$\bar{e}_{AB} = \frac{\bar{r}_{AB}}{r_{AB}} = \left\{ \bar{r}_{AB} = \overset{B}{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}} - \overset{A}{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{-2, 1, 3}{\sqrt{14}}$$

* $$\bar{S} = S\bar{e}_{AB} = \frac{250\,N}{\sqrt{14}}(-2, 1, 3)$$

* Bestäm $\bar{M}_O$

kan förflytta $\bar{S}$ längs verkningslinjen

$$\bar{M}_O = \bar{r}_{OB} \times \bar{S} = \bar{r}_{OA} \times \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \frac{250\,Nm}{\sqrt{14}} = \frac{250\,Nm}{\sqrt{14}} \begin{vmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{vmatrix}$$