Kap 4 (4.3, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Kraftsumma $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_N = \sum_{k=0}^{N} \bar{F}_k$

OBS ! Man kan reducera alla kraftsystem till en kraftsumma och ett kraftmoment.

Sambandsformeln $\bar{M}_A = \bar{M}_B + \bar{r}_{AB} \times \bar{F}$

Kraftskruv varje reduktionsresultat kan alltid reduceras till en kraftskruv där kraftmomentet är parallellt med kraftsumman.

Två viktiga specialfall

1- Om $\sum \bar{F} \neq \bar{0}$ & $\sum \bar{F} \perp M_A$ kan systemet reduceras till en kraftresultant

2- Om $\sum \bar{F} = \bar{0}$ men $\bar{M}_A \neq 0$ kan systemet reduceras till ett kraftpar

Uppgift 4.3

Givet: Se figuren i boken

Söker: i) Kan systemet reduceras till enkraftresultant ii) I så fall var ligger angreppspunkten

Lösning

- Döp krafterna till A,B,C och D samt bestäm ortsvektorerna.

$$\bar{r}_{0A} = (0,1,0)m, \qquad \bar{r}_{0C} = (2,-1,0)m$$
$$\bar{r}_{0B} = (2,2,0)m, \qquad \bar{r}_{0D} = (1,-3,0)m$$

- Bestäm krafterna och systemets kraftsumma

$$\bar{F}_A = (0,0,-4)N, \qquad \bar{F}_C = (0,0,-16)N$$
$$\bar{F}_B = (0,0,8)N, \qquad \bar{F}_D = (0,0,10)N$$
$$\bar{F} = \bar{F}_A + \bar{F}_B + \bar{F}_C + \bar{F}_D = (0,0,-2)N$$

Redan här kan vi dra slutsatsen att systemet kan reduceras till enkraftresultant eftersom alla krafter är parallella. Varje enskild moment kommer inte ge upphov till någon komponent i z-axeln och därmed kommer totala momentet att vara vinkelrätt mot kraftsumman som är parallell längs z-axeln.

- Beräkna $\bar{M}_0$

$$\begin{aligned}\bar{M}_0 =& \bar{M}_{0A} + \bar{M}_{0B} + \bar{M}_{0C} + \bar{M}_{0D} = \\ & \bar{r}_{0A} \times \bar{F}_A + \bar{r}_{0B} \times \bar{F}_B + \bar{r}_{0C} \times \bar{F}_C + \bar{r}_{0D} \times \bar{F}_D = \\ & -4(1,0,0)Nm + 8(2,-2,0)Nm + 16(1,2,0)Nm + 10(-3,-1,0)Nm = \\ & (-2,6,0)Nm\end{aligned}$$

Svar: Systemet kan reduceras till enkraftresultant eftersom

$$\bar{F} \cdot \bar{M}_0 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \bar{F} \perp \bar{M}_0$$

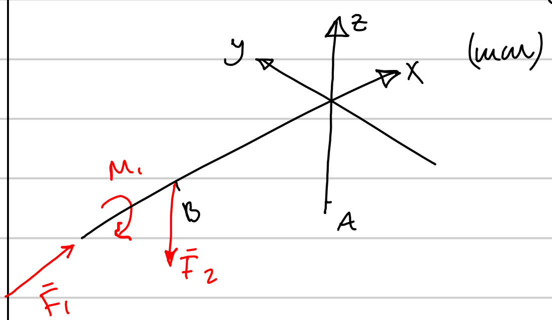
- Hitta angreppspunkten (x, y, z)

$$\bar{M}_{\text{Ang}} = \bar{M}_0 + r_{\text{Ang-0}} \times F = \bar{0}$$
$$(-2,6,0) + (-x,-y,-z) \times (0,0,-2) =$$
$$(-2+2y, 6-2x, -z) = (0,0,0)$$
$$\longrightarrow x = 3, y = 1, z = 0$$

Svar: För att få enkraftresultant, angreppspunkten bör ligga i (3,1,0).

4.7 – Givet: se figuren

Sökes: kraftsumma angripande i punkten A



$A: (0, 0, -150)$ mm | $\bar{F}_1 = 100 N \bar{e}_x$

$B: (-200, 0, 0)$ mm | $\bar{F}_2 = -20 N \bar{e}_z$

| $\bar{M}_1 = 10 Nm \bar{e}_x$

Lösning

* Beräkna kraftsumma

$\Sigma \bar{F} = \underline{\underline{(100, 0, -20)\, N}}$

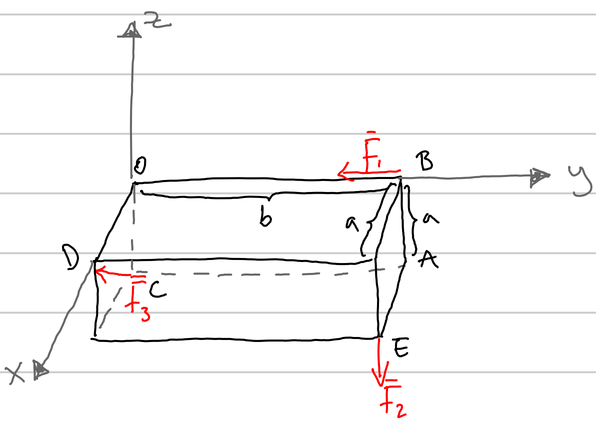
* Beräkna $\bar{M}_A$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_1 + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}_1 + \bar{r}_{AB} \times \bar{F}_2 =$$

$$= 10 Nm\, \bar{e}_x + 150 mm\, \bar{e}_z \times 100 N \bar{e}_x + (-200\, mm\, \bar{e}_x + 150\, \bar{e}_z) \times (-20 N \bar{e}_z)$$

$$= 10 Nm\, \bar{e}_x + 15 Nm\, \bar{e}_y - 4 Nm\, \bar{e}_y = \underline{\underline{(10, 11, 0)\, Nm}}$$

4.6



A: (0, b, −a), B: (0, b, 0)

C: (0, 0, −a), D: (a, 0, 0), E (a, b, −a)

<u>Lösning</u>

$F_1 = F_2 = P$, $F_3 = 2P$

$\bar{F}_1 = P \cdot -\bar{e}_y = P(0,-1,0)$

$\bar{F}_2 = P \cdot -\bar{e}_z = P(0,0,-1)$

$\bar{F}_3 = 2P \cdot \frac{\bar{r}_{CD}}{r_{CD}} = 2P \frac{(a,0,a)}{a\sqrt{2}} = P(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

a) Den totala kraftsuman blir:

$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + F_3 = P(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2} - 1)$

Mometet i punkten A blir:

$\bar{M}_A = \bar{r}_{DA} \times \bar{F}_1 + \bar{r}_{OB} \times \bar{F}_2 + \bar{r}_{OC} \times \bar{F}_3$

$(0,0,a) \times (0,-1,0)P + (a,0,0) \times (0,0,-1)P + (a,-b,a) \times (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})P =$

$(a,0,0)P + (0,a,0)P + (-b\sqrt{2}, 0, b\sqrt{2}) =$

$(a-\sqrt{2}b, a, b\sqrt{2})$

b) För att ett kraftsystem ska kunna reduceras till en kraft behövs det att den totala kraften skalärt med momentet ska bli lika med 0.

$\bar{F} \cdot \bar{M}_A = P(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}-1) \cdot P(a - \sqrt{2}b, a, \sqrt{2}b) = 0$

$a\sqrt{2} - 2b - a + 2b - \sqrt{2}b$

$a(\sqrt{2} - 1) + b(2 - \sqrt{2}) = 0$

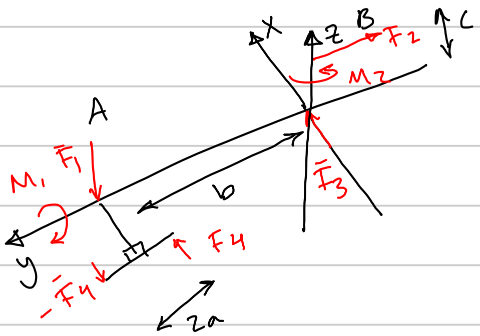
$b = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} a$

OBS! Vi ser att sambandet kommer att gälla oavsett P.

c) Nej, eftersom kraftpars moment förutsätter att kraftsumman ska vara noll, vilket är inte det i det här fallet.

4.8 – Givet: Se figuren

Söker: Reducera till en kraft i O och ett kraftmoment i O.



$\bar F_1 = -2p\ \bar e_z$ | $\bar M_1 = -bp\ \bar e_y$

$\bar F_2 = -2p\ \bar e_y$ | $\bar M_2 = ap\ \bar e_z$

$\bar F_3 = 2p\ \bar e_x$ | $A: (0, b, 0)$

$\bar F_4 = p\ \bar e_x$ | $B: (0, 0, c)$

Lösning

* Beräkna kraftsumman

$$\sum_{i=1}^{4} \bar F_i = p(2p, -2p, -2p)$$

Fundera på detta

* Beräkna $\bar M_0$

$$\bar M_0 = \bar r_{OA} \times \bar F_1 + \bar r_{OB} \times \bar F_2 - 2ap\ \bar e_x + \bar M_1 + \bar M_2$$

$$= b\bar e_y \times -2p\bar e_z + c\bar e_z \times -2p\bar e_y - 2ap\bar e_x - bp\bar e_y + ap\bar e_z$$

$$= -2bp\ \bar e_x + 2cp\ \bar e_x - 2ap\ \bar e_x - bp\bar e_y + ap\bar e_z$$

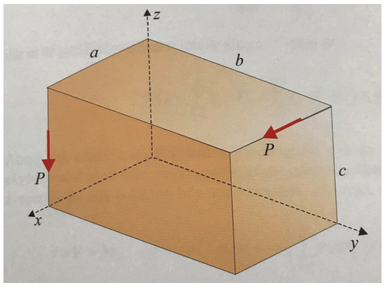
$$= p(2c - 2b - 2a, -b, a)$$

* Enkraftresultant? $\longrightarrow$ om $\bar F \neq 0$ men att $\bar F \cdot \bar M_0 = 0$

$$\bar F \cdot \bar M_0 = p(4c - 4b - 4a - 2b - 2a) = 2p(2c - 3b - 3a) = 0$$

Men om $2c - 3b - 3a = 0$ kan man reducera systemet till en en kraftresultant.

Uppgift 4.10

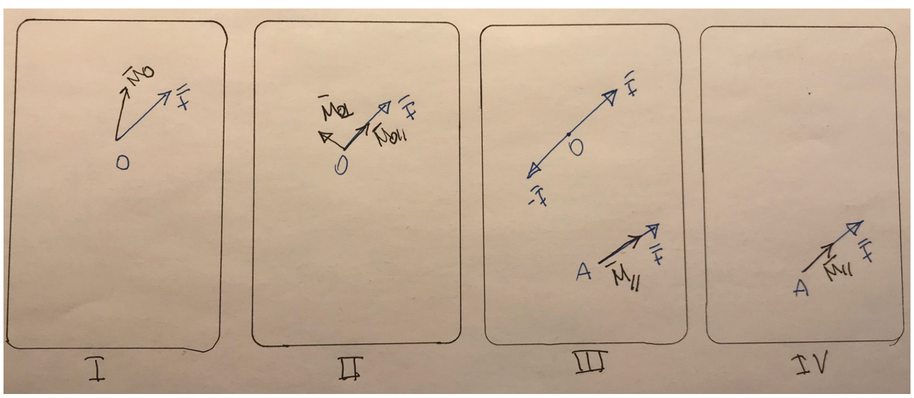


Givet: Se figuren

Söker: i) Reducera systemet till en kraftskruv och bestäm dess moment $\bar{M}$ ii) Ange koordinaterna för skärningspunkten mellan kraftskruvens verkningslinje och XY-planet

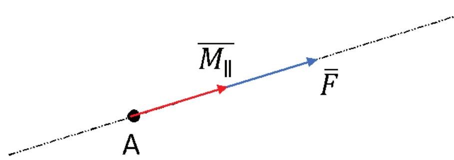
Lösningsmetod

På sida x har vi lärt sig hur man kan ta ett reducerat system och få det ekvimoment till ett system bara bestående av en kraftskruv. Vi ska följa stegen enligt bilden nedan. Steg I: reducera systemet till en kraft och ett kraftmoment i en godtydlicklig punkt, t.ex origo. Steg II: Komposantuppdela momentet till en parallell och vinkelrätt mot själva kraftsumman. Steg III: Nu kan man transportera $\bar{M}_{/\!/}$ runt om kring i systemet och behålla samma vridmoment. Lägg till ett kraftpar, det ena med motsatt tecken i origo och en annan i punkten A. Vi väljer punkten A så att m.h.a. sambandsformeln det kraftparet som vi har, ersätter $\bar{M}_{\perp}$. Steg IV: Eftersom vi har två krafter med samma belopp och ombytt tecken i origo tar dem ut varandra. Därmed har vi reducerat momentet till en kraftskruv.



Lösning

- Kraftskruvens verkningsline: Det är linjen som går igenom kraftskruvens angreppspunkt, A i bilden nedan, och är parallell med kraftsumman $\bar{F}$.



- Bestäm $\bar{F}$ och $\bar{M}_0$

$$\bar{F} = P(1,0,0) + P(0,0,0,-1) = P(1,0,-1)$$
$$\bar{M}_0 = a\bar{e_x} \times -P\bar{e_z} + (0,b,c) \times P\bar{e_x} = aP(0,1,0) + P(0,c,-b) = P(0,a+c,-b)$$

- Bestäm $\bar{M}_{0/\!/}$

Kraftens enhetsriktning: $\bar{e}_F = \frac{\bar{F}}{F} = \frac{1,0,-1}{\sqrt{2}}$

$$\bar{M}_{/\!/} = (\bar{M}_0 \cdot \bar{e}_F)\bar{e}_F = \left(P(0, a+c, -b) \cdot \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}\right)\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{Pb}{2}(1,0,-1)$$

Svar: kraftskruvens moment $\bar{M} = \bar{M}_{0/\!/} = \frac{Pb}{2}(1,0,-1)$

Kom ihåg att $\bar{M}_{0/\!/}$ har samma vridmoment överallt i systemet och därför behöver vi inte specificera dess angreppspunkt, $\bar{M}_{0/\!/} = \bar{M}_{/\!/}$. I nästa steg vill vi bestämma punkten A m.h.a. sambandsformeln så att ett kraftpar kan ersätta det vinkelrätta momentet. Därför det enda vridmomentet som återstår är bara $\bar{M}_{/\!/}$ som kommer att ha samma riktning som själva kraften och därav namnet kraftskruv.

- Bestäm $\bar{M}_{0\perp}$:

$$\bar{M}_{0\perp} = \bar{M}_0 - \bar{M}_{0/\!/} = P(0, a+c, -b) - \frac{Pb}{2}(1,0,-1) = \frac{P}{2}(-b, 2(a+c), -b)$$

- Bestäm skärningspunkten A (x, y, z)

$$\begin{aligned}
&\bar{M}_A = \bar{M}_{0\perp} + \bar{r}_{AO} \times \bar{F} = \bar{0} \\
&\bar{M}_{0\perp} = -\bar{r}_{AO} \times \bar{F} = \bar{r}_{OA} \times \bar{F} \\
&\bar{r}_{0A} \times \bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{e} & \bar{e} & \bar{e} \\ x & y & z \\ P & 0 & -p \end{bmatrix} = P(-y, (x+z), -y)
\end{aligned}$$

Uppgiften är det givet att vi är intresserade av skärningspunkten i XY-planet därför sätter vi $z = 0$ och löser ekvationen

$$\begin{aligned}
&\bar{M}_{0\perp} = \bar{r}_{OA} \times \bar{F} \\
&\frac{P}{2}(-b, 2(a+c), -b) \\
&x + z = a + c \\
&y = \frac{b}{2}, \qquad x = a + c
\end{aligned}$$

Svar: Den sökta skärningspunkten är $x = a + c, y = b/2$