Kap 9 (9.2, 9.7, 9.18, 9.19, 9.22, 9,24, 9.25, 9.33)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Det totala arbetet

$$U_{1-2} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$ *där partikel flyttas från punkt 1 till 2*

Effekt

$$P = \bar{F} \cdot \bar{V} \qquad \frac{dU}{dt} = P$$

Kinetiskenergi

$$T = 1/2\, mv^2 \qquad U_{1-2} = T_2 - T_1$$

Konservativ kraft

Det är en kraft där arbetsintegralen är oberoende vägen

Potentiell energi

$$V(\bar{r}) = -\int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$$

$$U_{1-2} = V_1 - V_2$$ *OBS! Under inverkan av konservativ kraft*

$$\{GM = gR^2\} \quad V(r) = -mg\frac{R^2}{r}$$

$$V(x) = 1/2\, k\, \Delta l^2$$

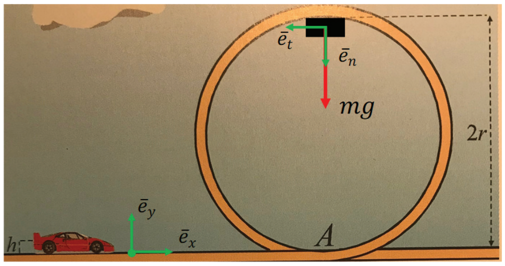
Mekanisk arbete

$$E = T + V$$ *OBS! Under inverkan av konservativ kraft*

Fjäderkraft V = 1/2 k(delta l)^2 där delta är fjäderns förlängning

Det är viktigt att komma ihåg, när vi har konservativa krafter kan vi använda oss både av lagen om kinetiska energin och energiekvationen. Men energiekvationen kan bara användas vid konservativa krafter och inte vid icke konservativa krafter såsom friktionskraften. Många gör detta misstag när man löser uppgift 9.26.

Uppgift 9.2



Givet: Se figuren, r, h

Söker: Minsta hastigheten v_A som krävs för att kunna fullborda varvet.
Speciellt om $h = 0.5$ m och $r = 10$ m

Lösning

- Frilägg kroppen och definiera ett lämpligt koordinatsystem för kraftekvationen i läge B och ett annat för energiekvationen.
- Kraftekvationen i läge B.

  För minsta möjliga hastighet i läge A, är normalkraften i läge B lika med noll. Den enda kraften som verkar på bilen i läge B, är gravitationskraften och därför ska det vara detsamma som centripetalkraften.

$$\bar{e}_n: \quad \frac{mv_B^2}{r-h} = mg$$
$$v_B^2 = g(r-h)$$

- Energiekvationen i läge A och läge B.

  Det är viktigt var vi har lagt grundnivån, för att det påverkar uttrycket för potentiella energin. Men efter förenkling kommer man att få samma svar.

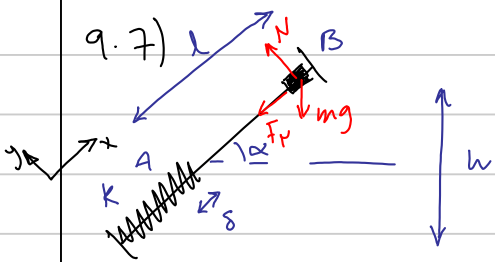
$$E_A = \frac{mv_A^2}{2} + mgh$$
$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + mg(2r-h) = \frac{m}{2}g(r-h) + mg(2r-h)$$
$$E_A = E_B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{mv_A^2}{2} + mgh = \frac{m}{2}g(r-h) + mg(2r-h)$$
$$v_A^2 = -2gh + gr - gh + 4gr - 2gh = 5g(r-h)$$
$$v_A = \sqrt{5g(r-h)}$$

Svar: Minsta hastigheten för att kunna fullborda varvet är $v_A = \sqrt{5g(r-h)}$ med insatta värde

$$v_A \approx 77.7 \text{ km/h}$$

Man kan använda sig av samma lösningsmetod för att lösa uppgift 9.25 och även kan man dubbekolla sitt svar genom att anta att vi har en cirkel och att h är lika med noll och då ska svaren blir lika.

9.7)



Givet: se figuren, m, l, K, α, μ, $V_A = 0$, $V_B = 0$
rörelse från punkten A till B
Söker: δ så att $V_B = 0$

Lösning

* Definiera ett lämpligt koordsys. & frilägg kroppen
* Kinetiska energins lag Varför? Vi har icke konservativa krafter

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 0 \quad (1)$$

Där U_{A-B} består av: I) fjäderkraften II) gravitationskraften III) friktionskraften

* Beräkna U_{A-B}

I) fjäderkraften $U^{I}_{A-B} = V_A - V_B = \frac{1}{2} K \delta^2 - 0$

II) Gravitationskraften $U^{II}_{A-B} = V_A - V_B = 0 - mgh = -mgl\sin\alpha$

III) friktionskraften $U^{III}_{A-B} = -F_\mu \cdot S = -\mu F_N l \cos\alpha = -\mu mgl\cos\alpha$

$$U_{A-B} = U^{I}_{A-B} + U^{II}_{A-B} + U^{III}_{A-B} = \frac{1}{2} K \delta^2 - mgl\sin\alpha - \mu mgl\cos\alpha \quad (2)$$

* Beräkna δ

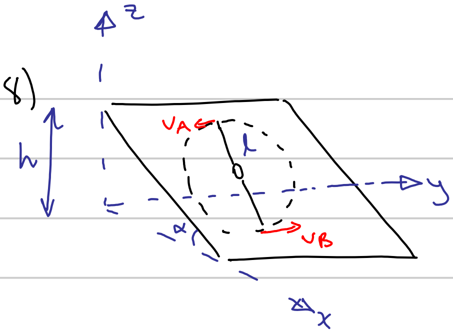
(1) & (2) $U_{A-B} = 0$

$$\frac{1}{2} K \delta^2 = mgl\sin\alpha + \mu mgl\cos\alpha$$

$$\delta^2 = \frac{2mgl}{K}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2mgl}{K}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}$$

9.18)

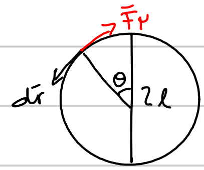


Givet i se figuren, v_A, l, α, μ

Söker: v_B

Lösning

* Definiera ett lämpligt koordsystem & frilägg kroppen



* Lagen om den kinetiska energin

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 1/2\, m v_B^2 - 1/2\, m v_A^2 \qquad ①$$

Där U_{A-B} består av: I) gravitationskraften II) friktionskraften

* Bestäm U_{A-B}

I) Gravitationskraften $U^{I}_{A-B} = V_A - V_B = mgh = mg2l\sin\alpha$

II) friktionskraften $U^{II}_{A-B} = \int_A^B \bar{F}_\mu \cdot d\bar{r} = -\int^{\pi} \mu N \, d\theta$

alternativ $U^{II}_{A-B} = F_\mu \cdot S = -\mu \overset{\circ}{N} \cdot S = -\mu mg\cos\alpha \cdot \underbrace{\pi l}_{S}$

N bestäms genom kraftekv. i y-riktningen

$$U_{A-B} = U^{I}_{A-B} + U^{II}_{A-B} = 2mgl\sin\alpha - \mu mgl\pi\cos\alpha \qquad ②$$

* Bestäm v_B

① & ② $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = 2mgl\sin\alpha - \mu mgl\pi\cos\alpha$

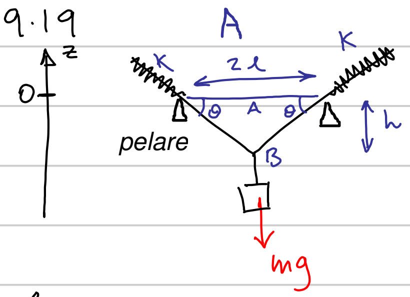
$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + 2mgl\sin\alpha - \mu mgl\pi\cos\alpha$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 4gl\sin\alpha - 2\mu gl\pi\cos\alpha$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gl\cos\alpha(\tan\alpha - \pi\mu)$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gl\cos\alpha(\tan\alpha - \pi\mu)}}$$

9.19



Givet: se figuren, K, θ, $V_A = 0$, l

Söker: $V_B = V$

Lösning

* Definiera ett lämpligt koord.-sys. och frilägg kroppen
  I) Gravitationskraften
  II) fjäderkraften

Det finns också krafter i den horisontella axeln, men dessa tar ut varandra, p.g.a symmetri

$$V = 1/2\ K\,\Delta l^2$$

$$\Delta l = l' - l = \frac{l}{\cos\theta} - l$$

Rimligt! om theta=0 har vi ingen friktionskraft och delta l = 0 och om theta går mot 90 blir uppgiften ofysikalisk

$$\Delta l^2 = \frac{l^2(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}.$$

* Kinetiska energins lag

$$U_{A-B} = T_B - T_A = 1/2\, m v^2 \quad (1)$$

Där U_{A-B} består av: I) gravitationskraften II) fjäderkraften

* Bestäm U_{A-B}

Observera var vi har lagt nollnivån

I) Gravitationskraften $U^{I}_{A-B} = V_A - V_B = 0 - (-) mgh = mgl\tan\theta$

II) fjäderkraften $U^{II}_{A-B} = V_A - V_B = 0 - 2\frac{1}{2}K\Delta l^2 = -Kl^2\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}$

2 eftersom vi har två fjädrar

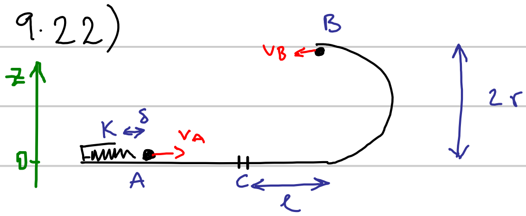
$$U_{A-B} = U^{I}_{A-B} + U^{II}_{A-B} = mgl\tan\theta - Kl^2\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta} \quad (2)$$

* Bestäm V

(1) & (2) $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\tan\theta - Kl^2\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}$

$$\boxed{V = \sqrt{2gl\tan\theta - \frac{2Kl^2}{m}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}}}$$

9.22)



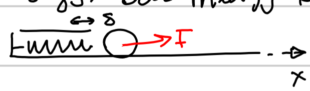
Givet: se figuren, g, r, k

Söker: δ, l

Lösning_

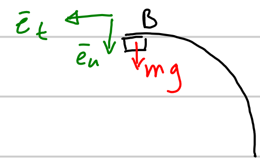
* Definiera ett lämpligt Koord. sys. och frilägg kroppen i punkten A & B

I) Fjäderkraften, punkt A



$F = \frac{1}{2} k \delta^2$

II) Gravitation och centripitalkraft punkt B



* Bestäm $v_B = v$

eftersom det är givet i lydelsen att vi vill ha minsta farten innebär det att $f_N = 0$ i punkten B.

$$\bar{e}_n: \quad \frac{m v_B^2}{\rho_B} = \frac{m v_B^2}{r} = mg \to v_B = \sqrt{gr}$$

* Bestäm den mekaniska energin i punkten B

$$E_B = T_B + V_B = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{T_B} + \underbrace{2mgr}_{V_B} = \frac{m}{2} gr + 2mgr = \frac{5}{2} mgr$$

* Bestäm den mekaniska energin i punkten A

$$E_A = T_A + V_A = \underbrace{0}_{T_A} + \underbrace{\frac{k\delta^2}{2}}_{V_A}$$

* Energiekvationen (konservativa krafter)

$$E_A = E_B \leftrightarrow \frac{k\delta^2}{2} = \frac{5}{2} mgr \leftrightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{5mgr}{k}}}$$

* Bestäm l Vi har ingen hastighet i den horisontella axeln

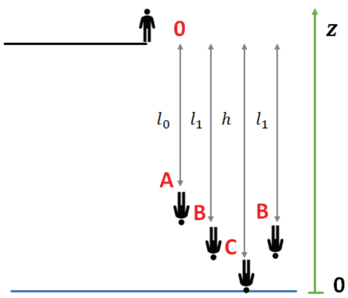
Betrakta kraftekvationen i z-riktningen i punkten B där vi antar att det är vår begynnelseläge

$$\ddot{z} = -g \to \quad \dot{z} = -gt + c_1 \quad \{\text{B.V } C_1 = 0\} \to \quad z = \frac{-gt^2}{2} + c_2 \quad \{\text{B.V } C_2 = 2r\}$$

På så sätt kan vi bestämma falltiden t från B till C $\to$ $0 = \frac{-gt^2}{2} + 2r \to \quad t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$

Nu kan vi bestämma $l \to$ $l = v_b \cdot t = \sqrt{gr} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \to \boxed{l = 2r}$

Uppgift 9.24



Givet: Avstånd till vattnet h, linan vid jämvikt l_1

Söker: Linans naturliga längd l_0, maximala farten $v_{\max}$, maximala accelerationen $a_{\max}$ och speciellt om $l_1 = \frac{2h}{3}$ och $h = 40$ m

Lösningsmetod

Svårigheten med denna uppgift är att vi själva behöver dela in hela hoppet i flera olika interval och tänka på tecknet av hastigheten och acceleration under den tiden. Från uppgiften har vi fått en ledning att $v_{\max}$ sker när summan av krafterna är lika med noll och $a_{\max}$ då summan av krafterna är extrema. Dessa kan bestämmas genom mekaniska energins lag och kraftekvationen.

Lösning

1. Bestäm ett lämpligt koordinatssystem

2. Dela in hoppet i flera intervall, avgör tecknet på $\ddot{z}$ och $\dot{z}$. Avgör också i vilket interval vi har $v_{\max}$ och $a_{\max}$.

Nr	Läge	$\ddot{z}$	$\dot{z}$	kommentar
I	$0 \to A$	-	-	Påverkas endast av gravitationskraften
II	$A \to B$	-	-	Acceleration blir längre, gravationskraften går delvis till fjäderkraften
III	B	0	-	Jämvikt, $v_{\max}$, fjäderkraften lika stor som gravitationskraften
IV	$B \to C$	+	-	Fjäderkraften>gravitationskraften men kvarstående kinetisk energi går till förlängning av linan
V	C	+	0	$a_{\max}$, ingen potentiell energi från gravitationen och ingen kinetisk energi
VI	$C \to B$	+	+	Fjäderkraften>gravitationskraften
VII	B	0	0	Efter alla svängningar hamnar vi i jämvikt med ingen hastighet

3. Bestäm fjäderkonstanten k, m.h.a. kraftekvationen i läge III eller VII Eftersom vi är i jämviktsläge i III och VII är summan av alla krafter lika med noll

$$0 = -mg + k(l_1 - l_0) \qquad \text{Observera att } \Delta l \text{ ska alltid vara postiv}$$

$$k = \frac{mg}{l_1 - l_0} \tag{3}$$

4. Bestäm h_0 m.h.a. den mekaniska energinslag,$E_I = E_V$. Eftersom vi har endast med konservativa krafter att göra kan vi använda oss av den mekaniska energinslag

$$mgh = \frac{k(h - l_0)^2}{2}$$

Observera vi har bara potentiell energi endast från gravitationen,inget från fjädern då den är ospänd. I läge V, har vi inget bidrag verken från gravitationen eller kintetiska energin då hastigheten är lika med noll. Med hjälp av ekvation 1

$$2mgh = \frac{mg}{l_1 - l_0}(h - l_0)^2 \quad \leftrightarrow \quad 2h(l_1 - l_0) = h^2 - 2hl_0 + l_0^2 \quad \leftrightarrow \quad 2h(l_1 - h) = l_0^2$$

$$\boxed{l_0 = \sqrt{h(2l_1 + l_0)}} \qquad \text{och speciellt} \qquad l_0 = \frac{h}{\sqrt{3}} \tag{4}$$

5. Bestäm $v_{\max}$ m.h.a. den mekaniska energinslag, $E_I = E_{III}$.

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{k(l_1 - l_0)^2}{2} + mg(h - l_1) = mgh \quad \text{Observera att avståndet från B till vattnet är } h - l_1$$

$$\text{ekvation 1} \rightarrow mv_{\max}^2 + \frac{mg}{l_1 - l_0} \cdot (l_1 - l_0)^2 + 2mg(h - l_1) = 2mgh$$

$$v_{\max}^2 + gl_1 - gl_0 + 2gh - 2gl_1 = 2gh$$

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{g(l_0 + l_1)}} \qquad \text{och speciellt} \qquad v_{\max} = \sqrt{gh\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \approx 79{,}5\text{km/h} \tag{5}$$

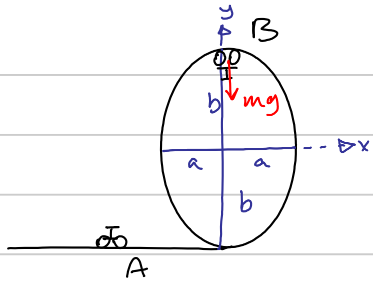
6. Bestäm $a_{\max}$ m.h.a. kraftekvationen i position C.

$$ma_{\max} = -mg + k(h - l_0) \qquad \text{ekvatione 1} \rightarrow \qquad ma_{\max} = -mg + \frac{mg}{l_1 - l_0} \cdot (h - l_0)$$

$$a_{\max} = \frac{g(-l_1 + l_0 + h - l_0)}{l_1 - l_0} g$$

$$\boxed{a_{\max} = \frac{g(h - l_1)}{l_1 - l_0}} \qquad \text{och speciellt} \qquad a_{\max} = \frac{g}{2 - \sqrt{3}} \approx 3{,}73 \text{ g} \tag{6}$$

9.25)



Givet: se figuren, a, b, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

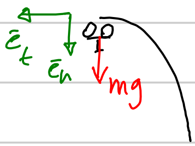
spec $a=3$ $b=4$ (m)

Söker: v_B

Intresserad av den minsta hastigheten

Lösning –

* Frilägg kroppen i punkten B och definiera ett lämplig koordsys.



* kraftekv i punkten B

$\bar{e}_n$) $\frac{mv^2}{\rho|_B} = mg \longleftrightarrow v_B^2 = \rho|_B\, g$ ①

* Bestäm ρ i punkten B

från kap 7 sida 152 ekv 7.36 $\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$y' = \frac{b}{a}\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \rightarrow y'|_{B\ x=0} = 0$ (intuitiv)

$y'' = \frac{b}{a}\frac{-\sqrt{a^2-x^2}-(-)2x\frac{(-)2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} \longrightarrow y''|_{B\,x=0} = \frac{b}{a}\frac{-\sqrt{a^2}}{a^2} = \frac{-b}{a^2}$

$\rho|_{B\,x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{a^2}{b}$

* Energiekvationen i punkten A & B

$E_A = \frac{mv_A^2}{2} - mgb$ (OBS! vi har valt en annan nollnivå på y-axeln)

$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + bmg \overset{①}{=} \frac{m}{2}\rho|_B\cdot g + bmg = \frac{m}{2}\frac{a^2}{b}g + bmg$

* Bestäm v_A

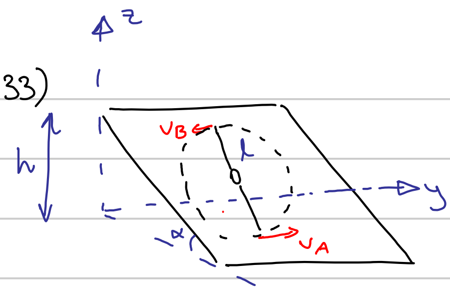
$E_A = E_B \longleftrightarrow \frac{mv_A^2}{2} - mgb = \frac{m}{2}\frac{a^2}{b}g + bmg$

$v_A^2 = \frac{a^2}{b}g + 4bg = g\frac{a^2+4b^2}{b}$

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{g}{b}(a^2+4b^2)} = 48{,}2 \text{ km/h}}$$

Bra sätt att dubbelkolla detta är att sätta a=b, då har vi en cirkelbana. Man kan jämföra svaret med uppgiften 9.22 och beräkna hastigheten precis innan cirkelbanan, v_a = sqrt(5gr).

9.33)



Givet: Se figuren, m, α, l, $2S_B = S_A$

Söker: S_A, S_B & v_A & v_B

Lösningsmetod

Gravitation

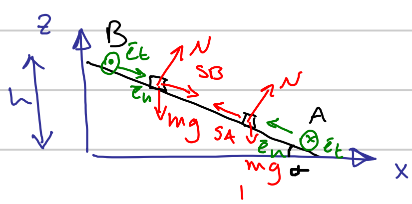
? vilka krafter utför ett arbete → & ΔT

Mekaniska energin → v_A & v_B

Kraftekv → (v_A & v_B) α (S_A & S_B)

Lösning

* Definiera ett lämpligt koordsystem för kraftekv och frilägg kroppen



* kraftekv i punkt A & B

$\underline{B}$ $\bar{e}_n$: $\frac{mv_B^2}{l} = S_B + mg\sin\alpha \longrightarrow S_B = \frac{mv_B^2}{l} - mg\sin\alpha$ (1)

$\underline{A}$ $\bar{e}_n$: $\frac{mv_A^2}{l} = S_A - mg\sin\alpha \longrightarrow S_A = \frac{mv_A^2}{l} + mg\sin\alpha$ (2)

* Mekaniska energin

$$E_A = T_A + V_A = T_B + V_B = E_B$$

$$E_A = \frac{mv_A^2}{2}$$

$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2l\,mg\sin\alpha$$

$$v_A^2 = v_B^2 + 4gl\sin\alpha \quad (3)$$

* Bestäm v_A & v_B

(1)&(2) $S_A = 2S_B \Longleftrightarrow \frac{mv_A^2}{l} + mg\sin\alpha = 2\frac{mv_B^2}{l} - 2mg\sin\alpha$

(3) $\frac{m}{l}\underbrace{(v_B^2 + 4gl\sin\alpha)}_{v_A^2} + mg\sin\alpha = 2\frac{mv_B^2}{l} - 2mg\sin\alpha$

$$4mgl\sin\alpha + mgl\sin\alpha + 2mgl\sin\alpha = 2mv_B^2 - mv_B^2$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{7gl\sin\alpha}}$$

(3) $v_A^2 = 7gl\sin\alpha + 4gl\sin\alpha \longrightarrow \boxed{v_A = \sqrt{11gl\sin\alpha}}$

* Bestäm S_A & S_B

(2) $S_A = \frac{m}{l}11gl\sin\alpha + mg\sin\alpha \longrightarrow$

$S_B = \frac{S_A}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} S_A &= 12mg\sin\alpha \\ S_B &= 6mg\sin\alpha \end{aligned}}$$