Kap 12 (12.3, 12.6, 12.7, 12.10, 12.14, 12.16)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Sektorhastighet

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}|$$

Sektorhastighet under centralkraft

$$\dot{A} = \frac{h}{2} = \text{konstant}$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r \dot{\theta}^2 = \text{konstant} \quad \text{(cylinder koord.)}$$

Binets formel

$$a_r = -h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad \text{där} \quad u = \frac{1}{r}$$

Keplers III lag, om loppstiden

$$T = \frac{2\pi \, a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Keplers III lag hastigheten

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}$$

Påminnelse från tidigare, potentiella energin

för den allmänna gravitaionskraften V(r) = -GmM/(r)

Kommentarer ∇̣

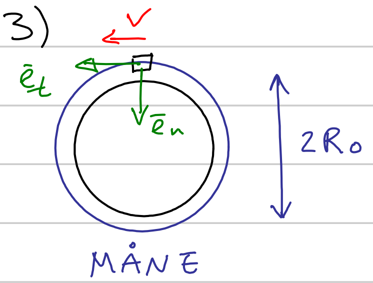
$\ast$ $mg = GmM/R^2 \longrightarrow gR^2 = GM$

$R = 6.4 \cdot 10^6$ m jordradie

** Iställer för att lära sig utantill dessa formler, lär er istället hur dem härleds*

** Läs frågorna noggran, tänk på vad det är som är givet och vad som är okänd*

12.3)



Givet: se figuren, $g_0 \approx \frac{g}{6}$, $R_0 \approx 0{,}27R$

Söker: v kretsa med månen

Kan lösas direkt med binets hastighetslag, men vi behöver inte lära oss utantill formler

Lösning

* välj lämplig koord. sys.

* Betrakta normalkomp av kraftekv.

$$\bar{e}_n: \quad \frac{mv^2}{R_0} = \frac{GmM}{R_0^2} \qquad v^2 = \frac{GM}{R_0}$$

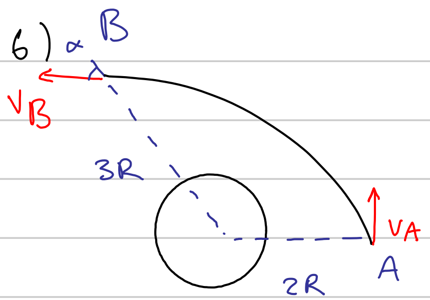
* Bestäm ett samband mellan g_0 och g

$$m g_0 = \frac{GMm}{R_0^2} \longrightarrow g_0 R_0^2 = GM$$

* Bestäm hastigheten v

$$v = \sqrt{\frac{g_0 R_0^2}{R_0}} = \sqrt{g_0 R_0} = \boxed{\sqrt{\frac{g}{6}\, 0{,}27\, R}}$$

12.6) α



Givet: Se figuren, α
Söker: v_B

Lösning

* Konstant rörelsemängdsmoment

$$2R\,m\,v_A = 3R\,m\,v_B \sin\alpha$$

(tänk på att v är hastigheten som är vinkelrät mot ortsvektor)

$$v_A = \frac{3}{2}\sin\alpha\, v_B \quad (1)$$

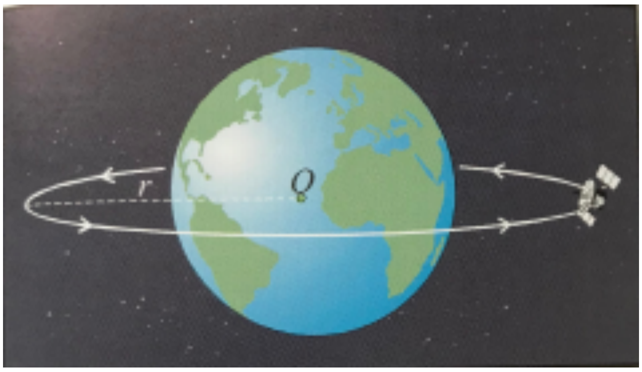
* Mekaniska energins bevarande (inverkan konservativa krafter)

$$T_A + V_A = T_B + V_B \longrightarrow \frac{m v_A^2}{2} - \frac{GmM}{2R} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{GmM}{3R}$$

(1) ger $v_B^2\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\alpha\right) = 2gR^2\left(\frac{1}{3R} - \frac{1}{2R}\right) = 2\cdot gR^2\,\frac{-1}{6R}$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{gR}{3\left(\frac{9}{4}\sin^2\alpha - 1\right)}}}$$

Uppgift 12.7



Givet: Se figuren, satellit roterar kring jorden med radien $r = 2R$ där $R = 6731$ km är jordensradie.

Söker: Sattelitens omloppstid τ

Lösning

- Man kan besvara denna fråga genom att direkt tillämpa Keplers III lag eller själv härleda detta. Fördelen med att härleda detta är att man inte behöver lära sig utantill en del formler.
- Bestäm rotationshastigheten v genom att ställa upp kraftekvationen i normalled.

  Centripetalkraften utgörs av jordens gravitationskraft.

$$\bar{e}_n : \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} = \frac{gmR^2}{r^2}$$
$$v = \sqrt{\frac{gmR^2}{r}} = \sqrt{\frac{gmR^2}{2R}} = \sqrt{\frac{gmR}{2}}$$

- Bestäm rotationstiden genom att vi vet att rotationsomkretsen, $2\pi r$ och rotationshastigheten v.

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \, 2R \cdot \sqrt{\frac{2}{gmR}} = 2\pi \, 2^{3/2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

- Man kan även direkt tillämpa Keplers III lag, sida 335 ekvation 12.38 och 12.39.

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{GM} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}}$$

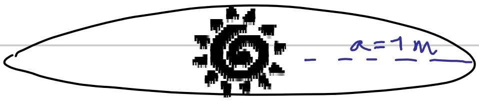
  där a är storaxelns längd i det här fallet $a = r = 2R$.

$$\tau = w\pi \frac{r^{3/2}}{R\sqrt{g}}$$

Svar: Satellitens rotationstid tid är

$$\tau = 2\pi \frac{r^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 2\pi \, 2^{3/2} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 239 \text{ min}$$

2.10)



Givet: anta en världen krymps så att $a' = 1\,m$, samma ρ för jorden

Sökt: T'

Ledning: Använd keplers III lag

Lösning

* vilka parametrar ändras vid en krympning
  avståndet a & massan M ← (samma ρ men olika V)

* Skriv om a' & M'

$$a' = k a \qquad k \ll 1$$

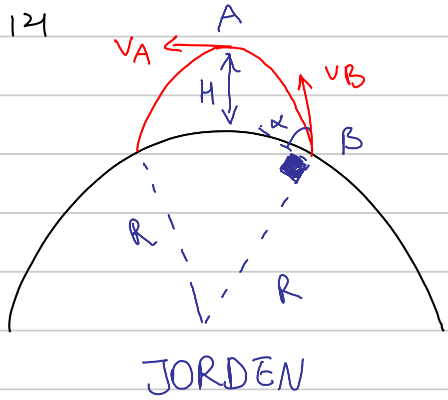
$$M' = \rho V' = \frac{M}{\frac{4\pi a^3}{3}} \cdot \frac{4\pi a'^3}{3} = \frac{M k^3 a^3}{a^3} = M k^3$$

* Bestäm T m.h.a Kepplers III lag

$$T' = \frac{2\pi a'^{3/2}}{\sqrt{GM'}} = \frac{2\pi k^{3/2} a^{3/2}}{\sqrt{G M k^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \frac{k^{3/2}}{k^{3/2}} = T$$

$$\boxed{T = T'}$$

12.121



Givet: Se figuren R, H, α

Spec om $\alpha = \frac{\pi}{3}$ & $H = \frac{R}{2}$

Söker: v_B

Lösning

* Konstant rörelsemängdsmoment, B & A

$$\cancel{m} R v_B \cos\alpha = \cancel{m} v_A (R+H) \longrightarrow v_A = \frac{v_B R \cos\alpha}{R+H} \quad (1)$$

* Mekaniska energin (inverkan av konservativa krafter)

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$\frac{m v_A^2}{2} - \frac{GmM}{H+R} = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{GmM}{R} \qquad \{GM = gR^2\}$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2gR\left(1 - \frac{R}{H+R}\right) \quad (2)$$

* Bestäm v_B

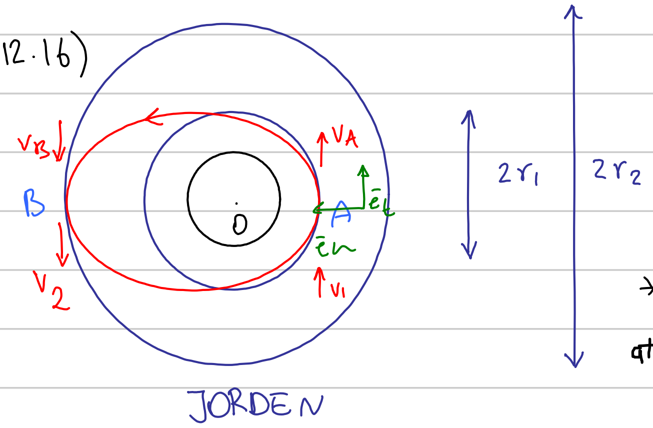
(1) & (2)
$$v_B^2\left(\frac{-R^2\cos^2\alpha}{(H+R)^2} + 1\right) = 2gR\left(1 - \frac{R}{H+R}\right)$$

$$v_B^2 \, \frac{-R^2\cos^2\alpha + (H+R)^2}{(H+R)^2} = 2gR \, \frac{H+R-R}{(H+R)}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{\frac{2gHR(H+R)}{-R^2\cos^2\alpha + (R+H)^2}}}$$

$$v_B\left(H = \frac{R}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3gR}}{2} \approx 6846 \text{ m/s}$$

12.16)



Givet: se figuren, $r_2 > r_1$

Söker Δv_A, Δv_B

Lösning

* Fundera på hur hastigheten kommer att ändras genom banan

Innan fartökningen i punkten A har vi hastigheten v_1 som är anpassad till den cirkulära banan $r = r_1$. Med $\Delta v_A > 0$ fås v_A för att kunna övervinna dragnings-kraften och ge satelliten högre potentiell energi. Hastigheten v_B är anpassad till den rödmarkerade elliptiska banan, om inget annars följer den banan och kommer till punkten A. Däremot om vi lägger $\Delta v_B > 0$ får vi en högre hastighet v_2 som är anpassad till den cirkulära banan med radie r_2.

* Normalriktning av kraftekv

$$\text{en}: \frac{mv^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \longrightarrow v = R\sqrt{\frac{g}{r}} \longrightarrow v_1 = R\sqrt{\frac{g}{r_1}} \; ; \; v_2 = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}$$

* Konstant centralrörelsemängdsmoment (inverkan av centralkraft).

$$m r_1 v_A = m r_2 v_B \longrightarrow v_A = \frac{r_2}{r_1} v_B \; ; \; v_B = \frac{r_1}{r_2} v_A$$

* Mekaniska energin bevaras (inverkan av konservativa krafter)

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{GmM}{r_2} \longrightarrow$$

$$v_A^2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = v_A^2\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} = v_A^2\frac{(r_2+r_1)(r_2-r_1)}{r_2^2} = 2gR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$v_A^2\frac{(r_2+r_1)\cancel{(r_2-r_1)}}{r_2^{\cancel{2}}} = gR^2 2\frac{\cancel{r_2-r_1}}{r_1\cancel{r_2}} \longrightarrow v_A = R\sqrt{\frac{2gr_2}{r_1}\frac{1}{r_2+r_1}}$$

$$v_B = \frac{r_1}{r_2}v_A = R\sqrt{\frac{2gr_1}{r_2}\frac{1}{r_2+r_1}}$$

* Bestäm Δv_A & Δv_B

$$\boxed{\Delta v_A = v_A - v_1 = R\sqrt{\frac{g}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_2+r_1}} - 1\right)}$$

$$\boxed{\Delta v_B = v_2 - v_B = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_2+r_1}}\right)}$$