Kap 13 (13.4, 13.7, 13.10, 13.11, 13.14)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Friodämpad svänging $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

vinkelfrekvens $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Period $T = 2\pi \omega_n^{-1}$

Fridämpad svängning $\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + kx = 0$

Dämpningsfaktor $2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$

Rötterna $\lambda_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

Stark dämpning $\xi > 1$ Härled uttrycket !

Kritisk dämpning $\xi = 1$ $x(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_n t)$

Svag dämpning $\xi < 1$ $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d$

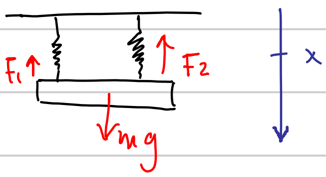
$\rightarrow x(t) = \exp\{-\zeta\omega_n t\}(A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t)$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

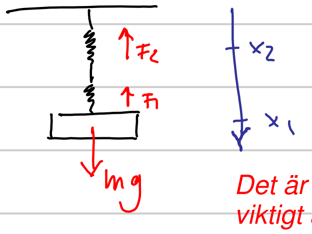
Logaritmisk dekrement

på tvingad (o) dämpad svänig Bra att känna till dem.

13.4)



FALL 1



FALL 2

Givet: se figuren, k_1 & k_2

Söker: k så att $T' = T$

Det är bra om man läser frågan noggrann. Också viktigt att förstå vad det menas med att ersätta med en fjäder.
Vi antar också att cylindern är som en partikel, om det inte skulle vara fallet, skulle cylindern hänga snett för fall 1 om k1 och k2 är inte lika stora

Lösning

* Def ett lämpligt koord. sys. & frilägg kroppen
* Kraftekv (FALL 1)

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x + mg$$

$$\ddot{x} + x\frac{(k_1+k_2)}{m} = mg \quad (1)$$

en fjäder

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

$$\ddot{x} + x\frac{k}{m} = mg \quad (2)$$

$$(1)=(2) \Leftrightarrow \omega_n'^2 = \omega_n^2 \qquad \boxed{k = k_1 + k_2}$$

* Kraftekv (FALL 2)

$$\begin{cases} F_1 = k_1 x_1 \\ F_2 = k_2 x_2 \end{cases}$$

Totala vertikala förändringen är lika med summan av förlängningen av vardera fjäder

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{Seriekopplade}$$

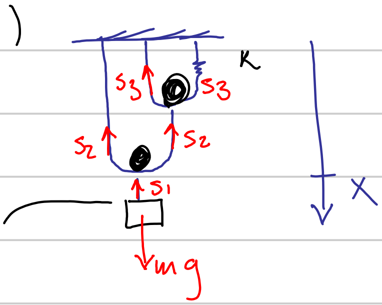
En fjäder

$$F = kx \quad (3)$$

$$x_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{F}{k_1} \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k_2} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(3)\,\&\,(4)\,(5)} \quad \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

13.7) 

Givet: se figur, k, m, g

Sökes: perioden T_n

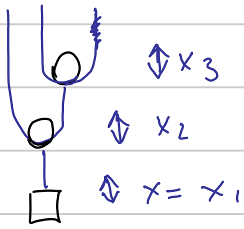
Lösning

* Def. ett lämpligt koord. sys. & frilägg kroppen
* kraftekv

$$S_1 = mg$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 2S_2 \\ S_2 &= 2S_3 \\ S_3 &= k\,x_3 \end{aligned}\right\} \quad S_1 = 4S_3 \longrightarrow S_1 = 4kx_3 \qquad (1)$$

* Hitta ett samband för förändring i x led



$$x = x_1 = x_2/2$$

$$x_2 = x_3/2$$

$$x = x_3/4 \qquad (2)$$

* Ställ upp diffekv (kraftekv)

$$m\ddot{x} = -S_1 + mg$$

$$m\ddot{x} \overset{(1)}{=} -4S_3 + mg \overset{(2)}{=} -4kx_3 + mg = -16kx + mg$$

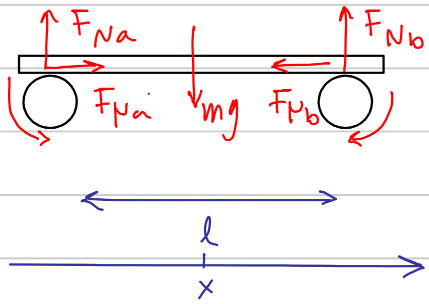
$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{16k}{m}}_{\omega_n^2} x = mg$$

* Bestäm perioden

$$T = 2\pi\,\omega_n^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{16k}}$$

$$\boxed{T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

13.10



Givet: se figuren, l, μ

Söker: T_n

Lösning

* Frilägg kroppen & def. ett lämpligt koord.sys.
* Kraftjämvikt.

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} = F_{\mu a} - F_{\mu b}$$

$$F_{\mu a} = \mu F_{Na}$$

$$F_{\mu b} = \mu F_{Nb}$$

Nu behöver vi bestämma normalkrafterna. Kom ihåg att samtliga krafter är en funktion av x och de varierar under rörelsen.

* Momentjämv.

$$\overset{\curvearrowleft}{M_b}: \quad -N_a \cdot l + mg(l/2 - x) = 0$$

$$N_a = \frac{mg}{l}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\overset{\curvearrowright}{M_a} \quad -N_b \cdot l + mg\left(\frac{l}{2} + x\right) = 0$$

$$N_b = \frac{mg}{l}\left(\frac{l}{2} + x\right)$$

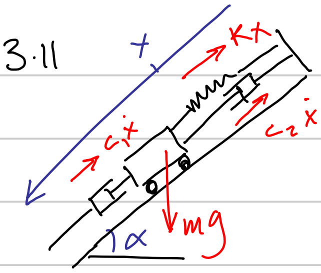
* Bestäm perioden

$$m\ddot{x} = F_{\mu a} - F_{\mu b} = \mu\left(F_{Na} - F_{Nb}\right) = \frac{\mu mg}{l}\left(\frac{l}{2} - x - \frac{l}{2} - x\right)$$

$$\ddot{x} + \underbrace{2\frac{\mu g}{l}}_{\omega_n^2} x = 0$$

$$T = 2\pi\,\omega_n^{-1} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}} = \boxed{\pi\sqrt{\frac{2l}{\mu g}}}$$

13.11



Givet: Se figur, k, c_1, c_2

Lösning: a) Δl vid jmv

b) villkor svagdämpning

c) T_d

Lösning

* Frilägg kroppen & def. ett lämplig koord-sys.
* Kraftekv.

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \dot{x}(c_1+c_2) - kx$$

$$\ddot{x} + \dot{x}\underbrace{\frac{c_1+c_2}{m}}_{=2\xi\omega_n} + x\underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} = g\sin\alpha \quad (1)$$

* Bestäm Δl vid jmv. läge

vid jmv läge $\ddot{x} = \dot{x} = 0 \quad (1) \rightarrow \boxed{x = \Delta l = \frac{mg}{k}\sin\alpha}$

* villkor för svagdämpning

$$\frac{c_1+c_2}{m} = 2\xi\omega_n \leftrightarrow \xi = \frac{c_1+c_2}{2m\omega_n} = \frac{c_1+c_2}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c_1+c_2}{2\sqrt{mk}}$$

$$\xi < 1 \leftrightarrow \frac{c_1+c_2}{2\sqrt{mk}} < 1 \leftrightarrow \boxed{c_1\,c_2 < 2\sqrt{mk}}$$

* Bestäm ω_d

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{(c_1+c_2)^2}{4mk}} = \sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c_1+c_2}{2m}\right)^2}$$

* Bestäm T_d

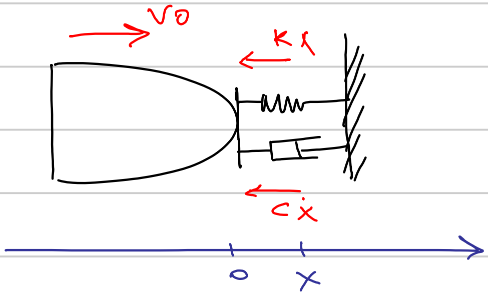
$$T_d = 2\pi\,\omega_d^{-1} = \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{c_1+c_2}{m}\right)^2}}}$$

13.14)

Givet: se figuren, m, K, vo

Kritisk dämpning

Söker: Xmax



Lösning

* Frilägg kroppen & def. ett lämpligt koord. sys.
* kraftekvationen

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \iff \ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{=2\xi\omega_n}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_n^2} x = 0$$

* Bestäm $x(t)$ (kritisk dämpning $\xi = 1$)

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \xi \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$x(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_n t)$$

BV $x(0) = 0$ $\qquad A = 0$

BV $\dot{x}(0) = V_0$ $\qquad \dot{x}(t) = \exp(-\omega_n t)\,(B - \omega_n t B)$

$$\dot{x}(0) = V_0 \iff B = V_0$$

* Bestäm Xmax

$\dot{x}(t) = 0$ $\qquad \exp(-\omega_n t)\, V_0\,(1 - \omega_n t) = 0$

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_n}$$

$$X_{max} = V_0 \cdot \frac{1}{\omega_n} \cdot \exp\left(-\omega_n \frac{1}{\omega_n}\right)$$

$$\boxed{X_{max} = \frac{V_0}{\exp(1)}\sqrt{\frac{m}{K}}}$$