Kap 10 (10.1, 10.6, 10.7, 10.9, 10.11, 10.12, 10.13)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Rörelsemängdmoment

$$\bar{H}_O = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Momentekv

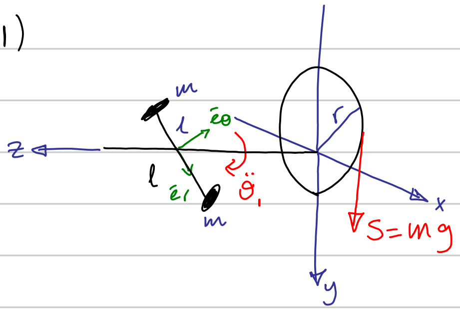
$$\dot{\bar{H}}_O = \bar{M}_O$$

Kommentar:

Momentekvationen är väldigt tillämpbar ekvation, spec när man vet att rörelsemängdsmomentet är konstant i en riktning då kan man t.ex säga $H_A^z = H_B^z$, dvs att z komp. av $\bar{H}$ är det samma för $\forall$ punkter

10.1)

1)



Givet: se figuren till vänster, m, l, r

Sökes $\ddot\theta_1, \ddot\theta_2, \ddot\theta_3$

Lösning

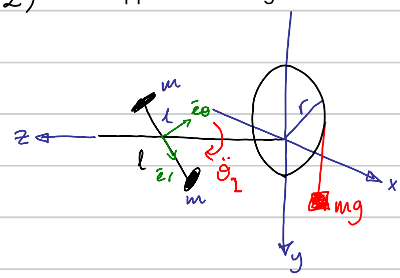
* Def. ett koordsys för hela systemet och en för kloten

1) Momentekvationen $\bar M_0 = \dot{\bar H}_0$,

$\dot{\bar H}_0 = \bar M_0$ $\qquad l\bar e_r \times \bar F = l\bar e_r \times 2ml\ddot\theta\,\bar e_\varphi = r\bar e_x \times mg\bar e_y = rmg\,\bar e_z$

$\bar e_z$: $2ml^2\ddot\theta = rmg \longrightarrow \boxed{\ddot\theta_1 = \frac{rg}{2l^2}}$

2) Ställt upp rörelsemängdsmomentet och derivera dig fram till momentekvationen.



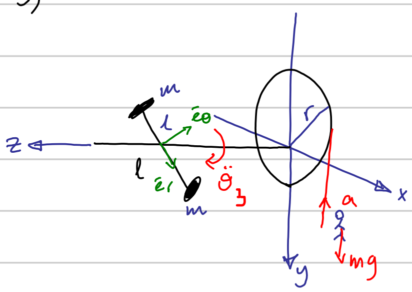
$l\bar e_r \times 2ml\ddot\theta_2\bar e_\theta + r\bar e_r \times mr\ddot\theta_2\bar e_\theta =$

$r\bar e_x \times mg\,\bar e_y$

$\bar e_z$: $2ml^2\ddot\theta_2 + mr^2\ddot\theta_2 = rmg$

$$\boxed{\ddot\theta_2 = \frac{rg}{2l^2 + r^2}}$$

3)



* kraftekv i y riktningen

$-S + mg = -ma$

$S = m(g+a)$

* Momentekv $\bar M_0 = \dot{\bar H}_0$

$l\bar e_r \times 2ml\ddot\theta_3\bar e_\theta = r\bar e_x \times S\bar e_y$

$2ml^2\ddot\theta_3 = rm(g+a)$

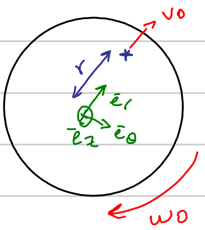
$$\boxed{\ddot\theta_3 = \frac{r(g+a)}{2l^2}}$$

vi får även att

$$\boxed{\ddot\theta_3 > \ddot\theta_1 > \ddot\theta_2}$$

Hur kommer det sig att vi får olika uttryck beroende på om det är en massa eller en kraft? Svaret ligger i rörelsemängsmomentet, i fall två och tre har vi en massa som det gör upphov till en rörelsemängd. Det är mer intuitivt att först räkna på rörelsemängdsmomentet, från systemet dra slutsatsen att den är konstant längs Z och senare derivera sig fram till momentekvationen.

10.6)



Givet: se figuren, v_0, w_0

Söker: Kompensationsmoment hos grammofonskiva pga skalbaggens rörelse om a) $v_0 > 0$

b) $v_0 < 0$

Lösning

* Bestäm $\dot{r}$

$$\dot{r} = v_0$$

* Kraftekvationen i cylinder koordinater

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$ minustecken pga att vi betraktar skalbaggens kraft vilket är motsatt tecken hos grammofonen

$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

* Momentekvationen

$$\bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O$$

om $v_0>0$: $$\cancelto{0}{r\bar{e}_r \times (\bar{F}_r)} + r\bar{e}_r \times \bar{F}_\theta = r\bar{e}_r \times m 2\dot{r}\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta = 2 m r v_0 w_0\,\bar{e}_z$$

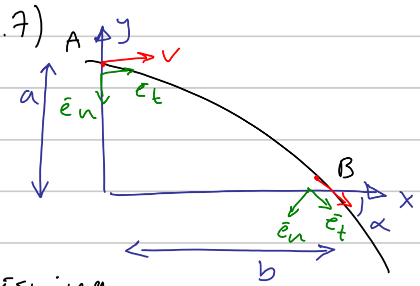
om $v_0<0$: $$r\bar{e}_r \times \bar{F}_\theta = r\bar{e}_r \times -m 2 v_0 \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta = -2 m r v_0 w_0$$

* Kompensationsmomentet

om $v_0>0$: $\boxed{\bar{M}_1 = 2 m r v_0 w_0}$

om $v_0<0$: $\boxed{\bar{M}_1 = -2 m r v_0 w_0}$

10.7)



Givet: se figuren, $\rho|_B = r$

Sökes: $\dot{H}^A_{Oz}$ & $\dot{H}^B_{Oz}$

(OBS! Lösningsförslaget på nätet löser uppgiften på ett felaktigt sätt)

<u>Lösning</u> –

* Definiera ett lämpligt koord.sys.
* Kraftekv i punkten A & B

$$\bar{F}_A = \frac{mv^2}{\rho|_A}\bar{e}_n$$

$$\bar{F}_B = \frac{mv^2}{\rho|_B}\bar{e}_n = \left\{ \bar{e}_n = -\sin\alpha\,\bar{e}_x - \cos\alpha\,\bar{e}_y \right\} = \frac{mv^2}{r}(-\sin\alpha\,\bar{e}_x - \cos\alpha\,\bar{e}_y)$$

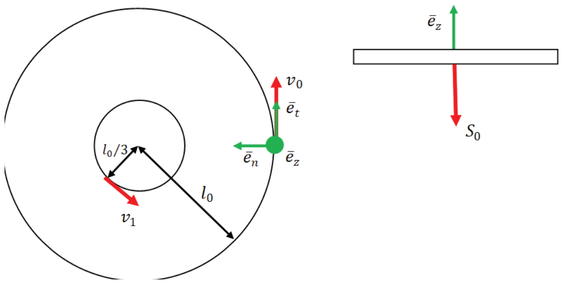
* Momentekv

$$\dot{\bar{H}}_{OA} = \bar{M}_{OA} \qquad a\,\bar{e}_y \times \frac{mv^2}{\rho|_A}\bar{e}_y = \bar{0} \longrightarrow \boxed{\dot{H}^A_{Oz} = 0}$$

$$\dot{\bar{H}}_{OB} = \bar{M}_{OB} \qquad b\,\bar{e}_x \times \frac{mv^2}{r}(-\sin\alpha\,\bar{e}_x - \cos\alpha\,\bar{e}_y) = -b\frac{mv^2}{r}\cos\alpha\,\bar{e}_z$$

$$\boxed{\dot{H}^z_{OB} = -b\frac{mv^2}{r}\cos\alpha}$$

Uppgift 10.9



Givet: Se figuren, start hastighet v_0, start längd l_0, massa m, avståndet minskas till $l_0/3$

Söker: i) Bestäm spännkrafterna S_0 och S_1 ii) U_{0-1} arbetet som måste uträttas för att flytta partikeln till den nya cirkelbanan.

Lösning

- Låt läge 0 vara starläget, med hastigheten v_0 och längden l_0 och läge 1 när hastigheten har ändrats till v_1 som är okänd och längden $l_0/3$

- Används momentekvationen m.a.p på rotationsaxeln.

  Systemets rörelsemängdsmoment med avseende på z-axeln bevaras

$$H_z^0 = H_z^1$$
$$m\, v_0\, l_0 = m\, v_1\, \frac{l_0}{3}$$
$$v_1 = 3v_0$$

  Detta är rimligt då intuitionen säger att hastigheten ökar när vi närmas oss hålet i bordet.

- Använd kraftekvationen

  Eftersom vi har en cirkulär bana med konstant radie vid läge 0 och läge 1 använder vi oss av naturliga komponenter. Spännkrafterna S_0 och S_1 är respektive cirkelbanas centripetalkrafter.

$$\bar{e}_z : (\text{Läge } 0) \qquad S_0 = \frac{mv_0^2}{l_0}$$
$$\bar{e}_z : (\text{Läge } 1) \qquad S_1 = \frac{mv_1^2}{l_0/3} = \frac{m(3v_0)^2}{l_0/3} = 27\frac{mv_0^2}{l_0}$$

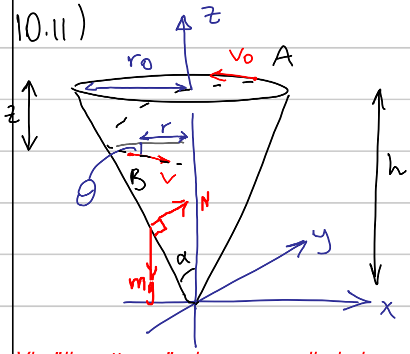
- Bestäm arbetet U_{0-1}

  Eftersom vi har konservativa krafter kan vi använda oss av kinetiska energins lag.

$$U_{0-1} = T_1 - T_0 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 9\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 4mv_0$$

Svar: $S_0 = \frac{mv_0^2}{l_0}$; $S_1 = 27\frac{mv_0^2}{l_0}$ och $U_{0-1} = 4mv_0^2$

10.11)



Givet: se figuren, z, v_0, h

Sökt: θ och v_0 om $z = \frac{h}{2}$

Lösning

* Fundera på vad ett lämpligt koordsystem kan vara & förklara ditt val.

Vi väljer att använda oss av cylinderkoordinater, eftersom vi har en cirkelrörelse med varierande radie och vi kan följa bollen under hela banan på ett lättare sätt.

Bestäm ortsvektorn, normalkraften samt kraftsumman.

$$\bar{r} = r \quad \bar{e}_r + (h - z) \quad \bar{e}_z$$
$$\bar{N} = N \sin\alpha \quad \bar{e}_z + N \quad \cos\alpha \quad \bar{e}_r$$
$$\bar{F} = \bar{N} - mg \quad e_z = N(\sin\alpha \quad \bar{e}_z + \cos\alpha \quad \bar{e}_r) - mg \quad \bar{e}_z$$

Beräkna momentet i origo

$$\bar{M}_0 = (r\bar{e}_r + (h-z)\bar{e}_z) \times (N \sin\alpha \quad \bar{e}_z + N \quad \cos\alpha \quad \bar{e}_r) \rightarrow M_{0z} = 0 \leftrightarrow H_z = \text{konstant}$$

Vi ser att z komponenten av momentet är alltid lika med noll

* Energiekvationen mellan punkt A & B

$E_A = E_B$ I det här fallet är hastgiheten vid v_A = v_0 och hastigheten vid v_B = v

$$\frac{m v_A^2}{2} + mgh = \frac{m v_B^2}{2} + mg(h-z) \Longleftrightarrow v_0^2 = v^2 - 2gz$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gz} \quad (1)$$

Anledning till att jag skriver v_x vilket kan också tolkas som theta riktningen av hastigheten är för att vi är intresserade av att bestämma rörelsemängdsmomentet i z-led.

* Momentekvationen

$$H_{Az} = H_{Bz} \longrightarrow m v_0 r_0 = m v_x r = m v \cos\theta \cdot r$$

$$\cos\theta = \frac{v_0 r_0}{v\, r} \overset{(1)}{=} \frac{v_0 r_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}} \frac{1}{r}$$

* koppla r och z

$$\tan\alpha = \frac{r}{h-z} = \frac{r_0}{h} \Longleftrightarrow r = \frac{h-z}{h} r_0$$

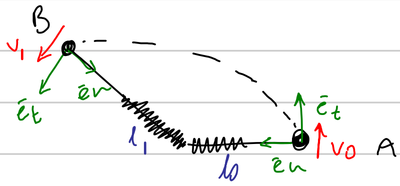
$$\cos\theta = \frac{v_0 r_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}} \frac{h}{h-z} \frac{1}{r_0} \qquad \boxed{\cos\theta = \frac{h}{h-z} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ är $z = \frac{h}{2}$ $\qquad \boxed{v_0 = \frac{gh}{3}}$

10.12)

Givet: se figuren, l_0, K, $l_1 = 2l_0$

Sökt: v_0



Lösning

* välj ett lämpligt koordsystem
* Förklara varför $M_z = 0$

Gravitationskraften är parallel med z-axeln samt att fjäderkraftensverkningslinje går igenom origo och det medför att M_z = 0 vilket är ekvivalens med att H_z är konstant

* Momentekvationen

$$H_z^A = H_z^B \qquad -l_0 \bar{e}_n \times m v_0 \bar{e}_t = -l \bar{e}_n \times m v_1 \bar{e}_t$$

$$m l_0 v_0 = m l_1 v_1 = 2 m l_0 v_1 \longrightarrow v_1 = v_0/2 \qquad (1)$$

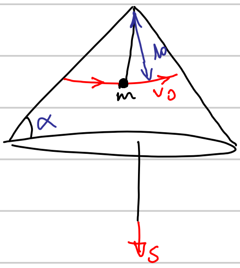
Att den nya hastigheten är halva initialhastighet är helt rimligt. Det visar att en del av den kinetiska energin

* Energiekvationen $E_A = E_B$

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} + \frac{1}{2} K (l_1 - l_0)^2 \Leftrightarrow v_0^2 = v_1^2 + \frac{K}{m} l_0^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad v_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{K}{m} l_0^2 \longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{4K}{3m} l_0^2} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = 2 l_0 \sqrt{\frac{K}{3m}}}$$

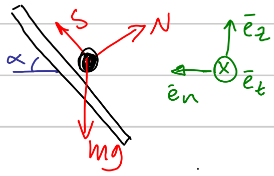
10.13) Givet: se figuren, v_0, l_0, α, $l_1 = \frac{l_0}{2}$



Söker: S_1 / S_0 spec om $v_0 = \sqrt{g l_0}/3$, $\alpha = 30^\circ$

Lösning

* Definiera ett lämpligt koord.syst & frilägg kroppen



* kraftekvationen

$\bar{e}_n$: $\frac{mv^2}{r} = S\cos\alpha - N\sin\alpha$

$r = l_0 \cos\alpha$

$\bar{e}_z$: $0 = S\sin\alpha + N\cos\alpha - mg$

löser vi ut $S = \frac{mv^2}{l} + mg\sin\alpha$ (1)

* $M_z = 0$ eftersom $g \parallel z$axeln & S verkningslinje går igenom origo.

* Moment ekvationen i punkten A med l, v_0 & punkten B $l_1 = \frac{l_0}{2}$, v_1

$m l_1 \cos\alpha \, v_1 = m l_0 \cos\alpha \, v_0 \longrightarrow v_1 = 2v_0$

* Beräkna kvoten mellan S_1 & S_0

$$\frac{S_1}{S_0} \overset{(1)}{=} \frac{mv_1^2/l_1 + mg\sin\alpha}{mv_0^2/l_0 + mg\sin\alpha} = \frac{\frac{4v_0^2}{l_0/2} + g\sin\alpha}{\frac{v_0^2}{l_0} + g\sin\alpha} = \boxed{\frac{8v_0^2 + gl_0\sin\alpha}{v_0^2 + gl_0\sin\alpha} = \frac{S_1}{S_0}}$$

För $v_0^2 = \frac{gl_0}{9}$ & $\alpha = 30^\circ$

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{8}{9} gl_0 + gl_0 \sin 30^\circ\right) / \left(\frac{gl_0}{9} + gl_0 \sin 30^\circ\right)$$
$$= \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\right) / \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{11}$$