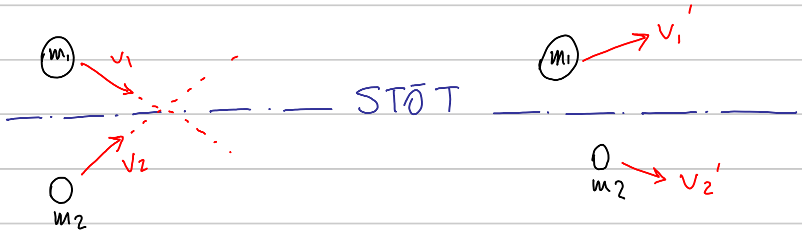
Kap 11 (11.4, 11.7, 11.9, 11.10, 11.15, 11.17, 11.18
11.19, 11.20, Tentatal 100526 f3)

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19



Rörelsemängdsbevarande

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m v_2'$$

Om vi har en rörelse i flera dimensioner kommer rörelsemängden att bevaras i alla riktningar

Studstal

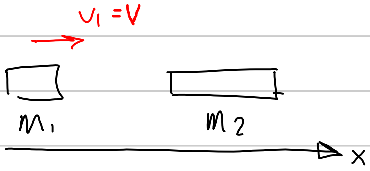
$$e = \frac{v_{2x}' - v_{1x}'}{v_{1x} - v_{2x}}$$

Observera!

* Att rörelsemängdsbevarande och studstal gäller i alla dimensioner

* Ett bra sätt att dubbelkolla sina räkningar är att sätta e = 0 och e=1 får att se om resultatet verkar rimligt.

11.4)



Givet: $m_1 = m$, $m_2 = Km$

$v_1 = v$, $v_2 = 0$, e

Söker: v_1' och v_2'

Lösning

* Rörelsemängds bevarande

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \longrightarrow mv = mv_1' + Kmv_2' \quad (1)$$

* Studstal

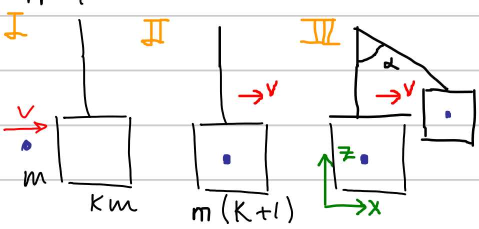
$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{v_2' - v_1'}{v} \longrightarrow ve = v_2' - v_1' \quad (2)$$

* Bestäm v_1' och v_2'

$$(1)+(2) \quad v(1+e) = v_2'(K+1) \longrightarrow \boxed{v_2' = v\frac{1+e}{K+1}}$$

$$\boxed{v_1' = \frac{1-Ke}{1+K} v}$$

11.7



Givet: K, α säcken har hastigheten noll vid start

Söker: v, spec om $\alpha = 10°$, $l = 1m$, $K = 500$

Lösning

* Rörelsemängdsbevarande I, II

$$mv = m(K+1)v' \iff v' = \frac{v}{K+1} \quad (1)$$

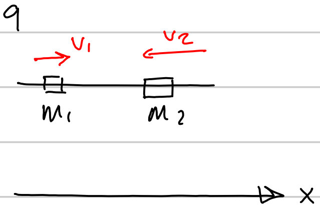
* Mekaniska energin II III

$$\frac{m(K+1)v'^2}{2} = m(K+1)g\,l\,(1-\cos\alpha) \quad (2)$$ Detta är höjdskillnaden

* Bestäm v

(1) i (2) $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{K+1}\right)^2 = g\,l\,(1-\cos\alpha) \rightarrow \boxed{v = (K+1)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}$

11.9



Givet: $m_1 = m, \quad m_2 = 2m$

$v_1 = 2u, \quad v_2 = -2u$

Lösning

* Rörelsemängds bevarande

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \longrightarrow m\cdot 2u - 2m\cdot u = mv_1' + 2mv_2'$$

* Studstal (egentligen finns bara en EU :))

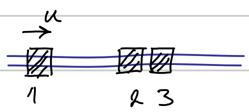
$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{v_2' - v_1'}{2u - (-)u} \longrightarrow 3eu = v_2' - v_1' \rightarrow v_2' = 3eu + v_1'$$

* Bestäm v_1' och v_2'

$$v_1' = -2v_2' \longrightarrow v_1' = -6eu - 2v_1' \rightarrow 3v_1' = -6eu$$

$\boxed{v_1' = -2eu}$ och $\boxed{v_2' = eu}$ observera att tecknet beror på hur vi def. koord. sys.

11.10



Givet: Se figuren. Partikel 1, 2, 3 helt identiska

$e > 0$, $v_1 = u$, $v_2 = v_3 = 0$

Söker: v_3' efter stöten

Lösning

* Betrakta stöten mellan partikel 1 & 2. Rörelsemängden bevaras

$$\begin{cases} m v_1 + \cancel{m v_2} = m v_1' + m v_2' \\ v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_1' + v_2' = u & \text{I} \\ v_2' - v_1' = e u & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} + \text{II} \rightarrow 2v_2' = u(e+1) \longrightarrow v_2' = \frac{u(e+1)}{2}$$

$$\text{I} - \text{II} \rightarrow v_1' = \frac{u(1-e)}{2}$$

* Betrakta stöten mellan partikel 2 & 3. Rörelsemängden bevaras

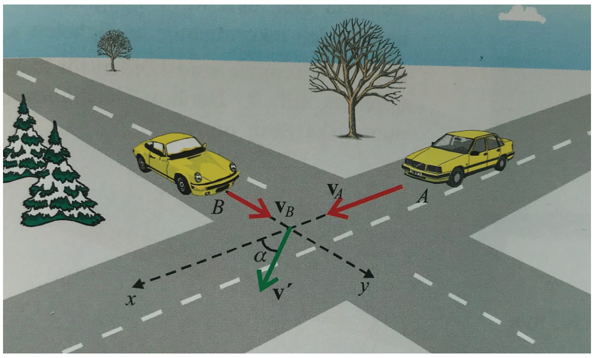
$$\begin{cases} m v_2' + \cancel{m v_3} = m v_2'' + m v_3' \\ v_3' - v_2'' = e(v_2' - \cancel{v_3}) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_2'' + v_3' = v_2' & \text{III} \\ v_3' - v_2'' = e v_2' & \text{IV} \end{cases}$$

$$\text{III} + \text{IV} \rightarrow 2v_3' = v_2'(1+e) \longrightarrow v_3' = \frac{v_2'(1+e)}{2} = u\frac{(1+e)^2}{4} = u\left(\frac{1+e}{2}\right)^2$$

$$\text{III} - \text{IV} \rightarrow 2v_2'' = v_2'(1-e) \longrightarrow v_2'' = \frac{v_2'(1-e)}{2} = \frac{u(1-e^2)}{4}$$

Svar: den tredje partikel glider iväg med hastigheten $v_3' = u\left(\frac{1+e}{2}\right)^2$

Uppgift 11.5



Givet: Se figuren, start hastigheterna v_A, v_B, och bilarnas massor m_A, m_B. Efter kollision får bilarna samma hastighet och det antas ingen friktion

Söker: i) hastighetsbeloppet efter kollison v' ii) bestäm vinkel α

Lösning

- Bestäm x och y komponenterna av v'

$$\bar{v}' = v' \cos\alpha \bar{e}_x + v' \sin\alpha \bar{e}_y$$

- Rörelsemängsbevarande Efter kollision slåss massorna ihop och bilarna får samma hastighet

$$\begin{aligned} p_x : \quad & m_A\, v_A = (m_A + m_B)\, v' \cos\alpha \\ p_y : \quad & m_B\, v_B = (m_A + m_B)\, v' \sin\alpha \end{aligned}$$

- Bestäm vinkel α genom att ta ta kvoten mellan rörelsemängds ekvationerna $\frac{p_x}{p_y}$

$$\begin{aligned} \frac{m_B\, v_B}{m_A\, v_A} &= \frac{(m_A + m_B)\, v' \sin\alpha}{(m_A + m_B)\, v' \cos\alpha} \\ \tan\alpha &= \frac{m_B\, v_B}{m_A\, v_A} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{m_B\, v_B}{m_A\, v_A}\right) \end{aligned}$$

Låt oss dubbelkolla om detta stämmer med intuitionen. Om bilarna skulle ha samma hastighet och samma massa, efter kollision ska det vara lika stor vinkel mot motsvarande normal för dem, dvs. 45○, vilket stämmer med vår modell. Låt oss anta att bil A skulle ha mycket större rörelsemängd, uttrycket i parentesen går mot 0 och därav också vinkel, vilket stämmer också med intuitionen.

- Bestäm hastigheten efter kollision

$$\begin{aligned} m_A^2\, v_A^2 + m_v^2\, v_B^2 &= (m_A + m_B)^2\, v'^2 \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) \\ v'^2 &= \frac{m_A^2\, v_A^2 + m_B^2\, v_B^2}{(m_A + m_B)^2} \\ v' &= \frac{\sqrt{m_A^2\, v_A^2 + m_B^2\, v_B^2}}{(m_A + m_B)} \end{aligned}$$

Svar: $\alpha = \arctan\left(\frac{m_B\, v_B}{m_A\, v_A}\right)$ och $v' = \frac{\sqrt{m_A^2\, v_A^2 + m_B^2\, v_B^2}}{(m_A + m_B)}$

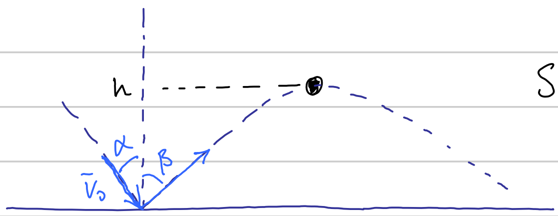
11.17 och 11.18

Givet: se figure

$\alpha = 30^0$, $\beta = 45^0$

h

Sökes: e, $\bar{v}_0$



Lösning

* Betrakta komposant uppdelning av v_0 och lagen om eln kinetiska energin

$$\begin{cases} v_0 \sin\alpha = v_0' \sin\beta \longrightarrow v_0' = \frac{v_0 \sin\alpha}{\sin\beta} \\ v_0 \cos\alpha = e v_0' \cos\beta \longrightarrow e = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_0' \cos\beta} = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\beta} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \end{cases}$$

Stöttalet påverkar endast uppåt gående hastigheten

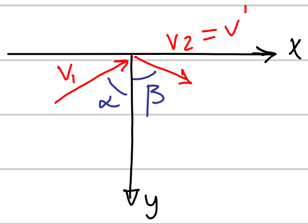
* Energiekvationen

$$\frac{1}{2} m (v_0' \cos\beta)^2 = mgh \longrightarrow v_0' = \frac{\sqrt{2gh}}{\cos\beta}$$

$$v_0 = \frac{e v_0' \cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} \frac{\sqrt{2gh}}{\cos\beta} = \frac{\tan\alpha \sqrt{2gh}}{\sin\beta}$$

Med de givna värden $v_0 \approx 6{,}3$ m/s

11.19 ~ 11.20



Givet: se figuren, α, e, $v_1 = v$

Söker: β och v'

Lösning.

* Rörelsemängdsbevarande

$$x: \quad m v \sin\alpha = m v' \sin\beta \quad (1)$$

$$y: \quad -m v \cos\alpha = m v' \cos\beta \quad (\hat{1})$$

* Studstal låt människan ha index 2 och pucken 1. Människan är stilla både innan och efter stöten

$$e = \frac{v'_{2x} - v'_{1x}}{v_{1x} - v_{2x}} = \frac{v'_{2y} - v'_{1y}}{v_{1y} - v_{2y}}$$

$$x: \quad -ve \sin\alpha = v' \sin\beta \quad (\hat{2})$$

$$y: \quad ve \cos\alpha = v' \cos\beta \quad (2)$$

* Bestäm v (antingen genom 1 & 2 eller $\hat{1}$ & $\hat{2}$)

$$(1)^2 \& (2)^2 \quad v^2 \sin^2\alpha + v^2 e^2 \cos^2\alpha = v'^2 \sin^2\beta + v' \cos^2\beta$$

Trignometriska ettan

$$\boxed{v' = v\sqrt{\sin\alpha + e^2 \cos^2\alpha}}$$

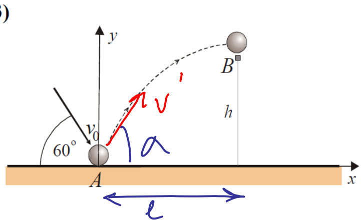
* Bestäm β

$$(1)/(2) \quad \frac{m v \sin\alpha}{e v \cos\alpha} = \frac{m v' \sin\beta}{v' \cos\beta} \rightarrow \boxed{\frac{\tan\alpha}{e} = \tan\beta}$$

Om lägger x koordinaten längsmarken i uppgift 11.20 och y axeln som normalen får man exakt samma ekvationer som ovan

Uppgift 3, 2010-05-26, teknisk fysik

3)



En pingisboll studsar i A på pingisbordet med en inkommande hastighet v_0 som bildar vinkeln 60° med bordet. Studstalet mellan bollen och bordsytan är e. Bestäm den minsta fart v_0 som krävs för att bollen skall komma över nätet med höjden h och hamna på andra sidan av bordet. Bestäm också avståndet l från A till nätet.

Givet: Se figuren, e, h

Söker: minsta v_0 så att vi når över h, l

Lösning

* Rörelsemängdsbevarande låt bordet ha index 1 och bollen 2. bordet kommer att vara stilla

x) $m v_0 \cos 60^\circ = m v' \cos\alpha \longrightarrow \frac{v_0}{2} = v' \cos\alpha$ (1)

* Studstal

y) $e = \dfrac{v_{2y}' - v_{1y}'}{v_{1y} - v_{2y}} \longrightarrow -\sin 60^\circ \, v_0 e = v' \sin\alpha$

$-\frac{\sqrt{3}}{2} v_0 e = v' \sin\alpha$ (2)

* Betrakta banan efter stöten

$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$

$v_x = \dot{x} = C_1 = v_x' = \frac{v_0}{2} \longrightarrow x = \frac{1}{2} v_0 t$

$v_y = -gt + C_2 = -gt + \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 e \longrightarrow y = -\frac{gt^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 e t + c_3$ 0 BV

* Bestäm tiden det tar från stöten till nätet, $t_{nät}$

$v_y = 0 \qquad g t_{nät} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 e \longrightarrow t_{nät} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_0 e}{g}$