Kap 6 (6.4, 6.9, 6.14, 6.21, 6.27, 6,32, 6.34, 6.35, 6.37, 150608 f1))

siname@kth.se, senast uppdaterat: VT19

Ett nödvändigt villkor för jämvikt $\bar{F} = \bar{0}$

$\bar{M}_A = 0$ där A är godtycklig punkt

Finns 3 fall
med fördel lös komponentvis

I) $F_x = F_y = 0$ $M_{Az} = 0$

II) $F_x = 0$ $M_{Az} = M_{Bz} = 0$ r_{AB} ej längs $\bar{F}$

III) $M_{z} = M_{Bz} = M_{Cz} = 0$ A & B & C ej längs en rät linje

Frilägg ning

? Vilket materiellt system och hur avgränsas det

? Jämvikts ekvationer, ersätt kontakt med kontaktkrafter

? Vilka krafter behövs för att lösa uppgiften och var bör vi lägga mommentet

Friktionstal $F = \mu N$

Jämvikt & glidning $0 \leq F \leq F_{max} = \mu_s N$

$F = \mu_k N$

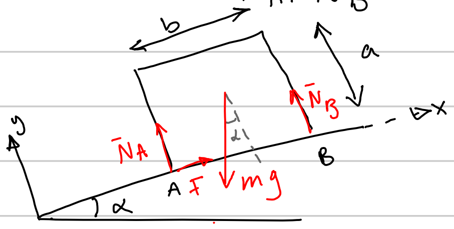
Jämviktsvillkor i 3D $\bar{F} = F_x, F_y, F_z = \bar{0}$

$M_A = M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az} = \bar{0}$

6.4 – Givet: se figuren, α, m

Söker: N_A, N_B & α_{max}

OBS! Man kan välja två olika koordinatsystem, ett som följer skåpet eller ett som följer rummet



Lösning

* Frilägg kroppen och markera krafterna
* Ställ upp jämviktsekvationerna

OBS vi vill undvika F i beräkningen eftersom det helt enkelt frågas inte efter det, detta är viktigt när vi ställer upp jämv. ekv.

$\uparrow - \bar{e}_y$; $N_A + N_B - mg\cos\alpha = 0$ (1)

$\curvearrowleft M_A$: $b\bar{e}_x \times N_B\bar{e}_y + \frac{b}{2}\bar{e}_x \times (-)mg\cos\alpha\,\bar{e}_y + \frac{a}{2}\bar{e}_y \times -mg\sin\alpha\,\bar{e}_x = \bar{0}$

$\bar{e}_z\left(bN_B - \frac{b}{2}mg\cos\alpha + \frac{a}{2}mg\sin\alpha\right) = \bar{0}$ (2)

$\rightarrow N_B = \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha - \frac{a}{b}\sin\alpha\right)$ (3)

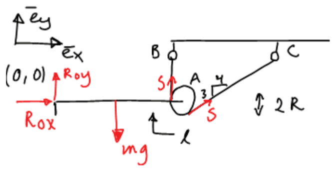
Insättning av (3) i (1) $N_A = mg\cos\alpha - N_B = mg\cos\alpha + \frac{mg}{2}\left(\frac{a}{b}\sin\alpha - \cos\alpha\right)$

$= \frac{mg}{2}\left(\cos\alpha + \frac{a}{b}\sin\alpha\right)$

* α_{max}, fås när $N_B = 0$, dvs hela tyngden trycker på N_A

$\cos\alpha_{max} = \frac{a}{b}\sin\alpha_{max} \Rightarrow \alpha_{max} = \arctan\frac{b}{a}$

Uppgift 6.9



Givet: Se figuren, m, l, R, lätt bom, glatt led i O

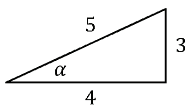
Söker: i) Spännkraften S ii) Reaktionskraften $\bar{R}_0$

Lösning

- Frilägg kroppen och välj ett lämpligt koordinatsystem
- Kraftjämvikt ger:

$$F_y: \quad R_{0y} - mg + S\sin\alpha + S = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_{0y} = mg - \frac{8S}{5} \tag{1}$$

$$F_x: \quad R_{0x} + S\cos\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_{0x} = -\frac{4S}{5} \tag{2}$$



$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Det är rimligt att R_{0x} får ett negativt tecken, eftersom den tar ut x-komponenten av den sneda spännkraften. Det innebär också att pilen borde vara riktad åt andra hållet.

- Momentjämvikt ger: Här kan man välja att beräkna momentet i origo eller i punkten A. Däremot är det problematisk att bestämma momentet från bidragen från spännkrafterna.

  Låt oss bestämma momentet från den sneda spännkraften, eftersom radien från cirkel A är vinkelrätt mot den kraften kan man m.h.a. högerhandsregel se att den kraften ger ett positivt bidrag till momentet. Däremot den andra vertikala spännkraften kommer att ge ett negativt bidrag och dessa tar ut varandra.

$$\bar{M}_A = -l\bar{e}_x \times R_{0y}\bar{e}_y - l/2\bar{e}_x \times -mg\bar{e}_y + SR\bar{e}_z - SR\bar{e}_z = \bar{0}$$

$$\bar{e}_z(-lR_{0y} + \frac{l}{2}mg) = \bar{0}$$

$$R_{0y} = \frac{mg}{2}$$

- Bestäm S m.h.a. av ekvation 1 och lös ut sedan R_{0x} från ekvation 2.

$$\frac{mg}{2} = mg - \frac{8S}{5} \quad \Longleftrightarrow \quad S = \frac{5mg}{16}$$

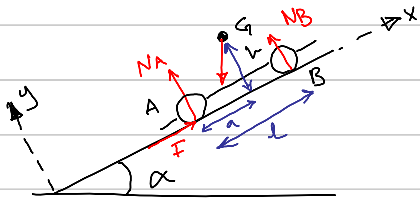
$$R_{0x} = \frac{-4}{5} \cdot \frac{5mg}{16} = \frac{-mg}{4}$$

Svar: $\bar{R} = mg\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right), S = \frac{5mg}{16}$

6.14 – Givet, se figuren, handbroms bara på bakhjulen
G, h, l, a, μ

Söker, a) α_{max} (bilen börjar glida)

b) Insättning om $\mu = \frac{1}{3}$ $\frac{a}{l} = \frac{5}{9}$ $\frac{h}{l} = \frac{1}{3}$



Lösning

* Frilägg kroppen, fundera på vilka krafter det finns, markera dessa i figuren.

* Ställ upp jämviktsekv.

Fundera på vilka krafter som inte behövs för att kunna lösa uppgiften?

N_B behövs inte, däremot N_A, F och mg behövs.

$\nearrow e_x$: $F - mg\sin\alpha = 0$

$\curvearrowleft M_B$: $-l\bar{e}_x \times N_A\bar{e}_y - (l-a)\bar{e}_x \times -mg\cos\alpha\,\bar{e}_y + h\bar{e}_y \times -mg\sin\alpha\,\bar{e}_x = \bar{0}$

varför väljer man punkten B?

$\bar{e}_z(-lN_A + (l-a)mg\cos\alpha + h\,mg\sin\alpha) = \bar{0}$

$\rightarrow N_A = \frac{l-a}{l} mg\cos\alpha + \frac{h}{l} mg\sin\alpha$

vid glidning $\mu = \frac{F}{N_A}$ α_{max}

* Uttryck friktionstalet

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{\frac{l-a}{l}mg\cos\alpha + \frac{h}{l}mg\sin\alpha} = \frac{l\sin\alpha}{(l-a)\cos\alpha - h\sin\alpha}$$

$$(l-a)\cos\alpha\,\mu = \sin\alpha(l + h\mu) \leftrightarrow \tan\alpha = \frac{(l-a)\mu}{l-h\mu} = \frac{(1-\frac{a}{l})\mu}{1-\frac{h}{l}\mu}$$

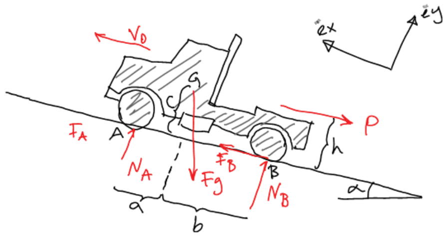
$$\underline{\underline{\alpha_{max} = \arctan\left(\frac{(1-\frac{a}{l})\mu}{1-\frac{h}{l}\mu}\right)}}$$

* Insättning

$$\alpha_{max} = \arctan\frac{(1-\frac{5}{9})\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\frac{1}{3}} = \arctan\frac{4/9}{8/3} = \arctan\frac{1}{6} \approx \underline{\underline{9{,}5^\circ}}$$

vid $9{,}5^\circ$ börjar bilen att glida

Uppgift 6.21



Givet: Se figuren, bakhjulsdriven bil, m, friktionstal μ, α

Söker: i) Maximal dragkraft ii) nummeriskt värde på P om $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 1$ m, $h = 1.5$ m, $\mu = 0.8, \alpha = 15°$

Lösning

- Eftersom bilen är bakhjulsdriven innebär det att vi endast har friktionskraft vid bakhjulen. Riktningen på friktionskraft är alltid motsatt dragningskraften.
- Ställ upp momentekvationen

  Kom ihåg att alla krafter vars verkningslinje går igenom punkten A kommer inte att ge upphov till något moment.

$$
\begin{aligned}
\bar{M}_A: \quad & -(a+b)\bar{e}_x \times N_B\bar{e}_y + (-a\bar{e}_x + c\bar{e}_y) \times mg(-\sin\alpha\bar{e}_x - \cos\alpha\bar{e}_y) + h\bar{e}_y \times -P\bar{e}_x = \bar{0} \\
& \bar{e}_z\left(-N_B(a+b) + amg\cos\alpha + cmg\sin\alpha + hP\right) = \bar{0} \\
& hP = N_B(a+b) - amg\cos\alpha - cmg\sin\alpha \\
& \textit{Multiplicera både sidor med } \mu \\
& hP\mu = N_B\mu(a+b) - amg\mu\cos\alpha - cmg\mu\sin\alpha
\end{aligned}
$$

- Ställ upp kraftekvationen

$$
\begin{aligned}
F\bar{e}_x: \quad & -P + F_B - mg\sin\alpha = 0 \\
& F_B = P + mg\sin\alpha
\end{aligned}
$$

- Lös ut maximala dragningskraften P. Vi vet att $N_B\mu = F_B$

$$
\begin{aligned}
& hP\mu = (P + mg\sin\alpha)(a+b) - amg\mu\cos\alpha - cmg\mu\sin\alpha \\
& P(h\mu - a - b) = mg\left(\sin\alpha(a+b-c\mu) - a\mu\cos\alpha\right) \\
& P = \frac{mg\left(\sin\alpha(a+b-c\mu) - a\mu\cos\alpha\right)}{(h\mu - a - b)} = \frac{mg\left(\sin\alpha(c\mu - a - b) + a\mu\cos\alpha\right)}{(a+b-h\mu)}
\end{aligned}
$$

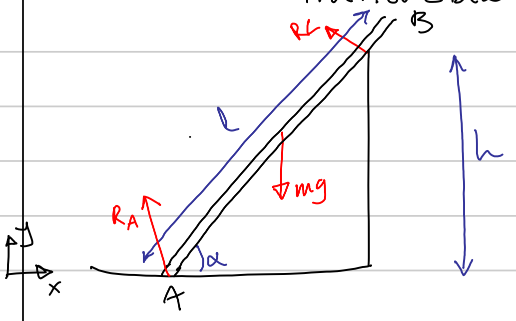
  Svar: Maximala dragningskraften är $P = \frac{mg(\sin\alpha(c\mu - a - b) + a\mu\cos\alpha)}{(a+b-h\mu)}$

- Med insättning av parametrar

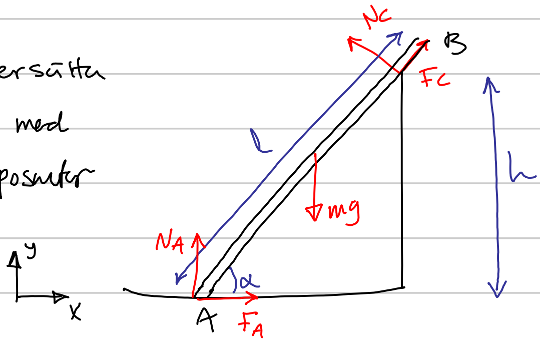
$$P \approx 0.11\, mg$$

6.27 – Givet: Se figuren, l, h, vid $\alpha = 60^\circ$ råder jämvikt, $l = \frac{4}{3}h$

Sökes: Friktionstalet μ



vi kan ersätta R_A & R_B med kraftkomposanter



Lösning

* Frilägg kroppen, markera krafterna, komposantuppdela

Svårigheten med denna uppgift är att vi kan inte ignorera en av krafterna ☹

* Ställ upp jämviktsekvationer

$\rightarrow \bar{e}_x$: $F_A + F_C \cos\alpha - N_C \sin\alpha = 0$

$\uparrow \bar{e}_y$: $N_A + N_C \cos\alpha - mg + F_C \sin\alpha = 0$

Låt oss diskutera i vilken punkt vi ska ta momentekvation. Om vi blickar framåt vill vi i slutändan bestämma $\mu = \frac{F_A}{N_A} = \frac{F_C}{N_C}$. Så egentligen spelar ingen roll, väljer man punkten A då hittar man hittar man ett samband mellan F_C & N_C, väljer man C blir det F_A & N_A.

varför är det praktiskt att skriva så?

$$\overset{\frown}{M_A}: \cos\alpha \cdot \frac{l}{2}\bar{e}_x \times -mg\bar{e}_y + \bar{r}_{AC} \times \bar{N}_C = \{r_{AC} = h/\sin\alpha\}$$

$$\bar{e}_z\left(-\frac{mgl}{2}\cos\alpha + h \cdot N_C/\sin\alpha\right) = \bar{0}$$

Om vi sätt $\alpha = 60^\circ$ och $l = \frac{4}{3}h$

$$\underbrace{-\frac{4}{3}}_{l}\frac{hmg}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}}hN_C = 0 \Leftrightarrow N_C = \frac{\sqrt{3}}{6}mg \rightarrow F_C = \frac{\sqrt{3}}{6}\mu mg$$

$$F_A = \frac{\sqrt{3}}{2}N_C - \frac{F_C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}mg - \frac{\sqrt{3}}{12}\mu mg = mg\left(\frac{3-\sqrt{3}\mu}{12}\right)$$

$$N_A = mg - \frac{N_C}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_C = mg - \frac{\sqrt{3}}{12}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{6}\mu mg = mg\left(1 - \frac{\sqrt{3}+3\mu}{12}\right)$$

* Bestäm friktionstalet μ

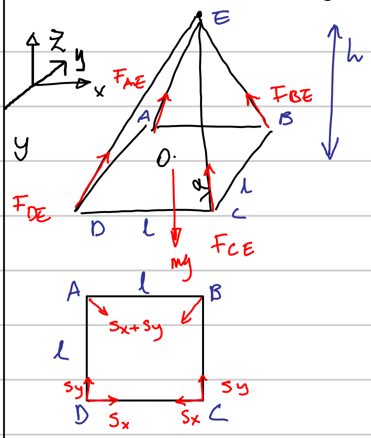
$$\mu = \frac{F_A}{N_A} = \frac{3-\sqrt{3}\mu}{12-\sqrt{3}-3\mu} \Leftrightarrow -3\mu^2 + \mu(12-\sqrt{3}+\sqrt{3}) - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 4\mu + 1 = 0$$

$\mu = 2 \pm \sqrt{3}$ (det kan ej vara större!)

$$\underline{\underline{\mu = 2 - \sqrt{3}}}$$

6.32 - Givet: se figuren, l, h, m

Söker: tryckkraften P på varje länk (vad menas med detta?)



Lösning

* Välj ett lämpligt koordinatssystem.

Vi väljer s.a. origo hamnar i mitten av plattan.

$A = \left(\frac{-l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right)$ $\quad C = \left(\frac{l}{2}, \frac{-l}{2}, 0\right)$ $\quad E = (0,0,h)$

$B = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right)$ $\quad D = \left(\frac{-l}{2}, \frac{-l}{2}, 0\right)$

* Ställ upp jämviktsekvationerna

$\Sigma \bar{F} = \bar{0}$ $\quad \bar{F}_{DE} + \bar{F}_{CE} + \bar{F}_{BE} + \bar{F}_{AE} - mg\,\bar{e}_z = \bar{0}$

$$F\left(\frac{\bar{r}_{DE}}{r_{DE}} + \frac{\bar{r}_{CE}}{r_{CE}} + \frac{\bar{r}_{AE}}{r_{AE}} + \frac{\bar{r}_{BE}}{r_{BE}}\right) = mg\,\bar{e}_z$$

F_AEz+F_BEz+F_CEz + F_DEz = mg

{ Mellan räkning

$\bar{r}_{DE} = \begin{vmatrix}0\\0\\h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-l/2\\-l/2\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}l/2\\l/2\\h\end{vmatrix} \rightarrow r_{DE} = \sqrt{\frac{l^2}{2} + h^2} = \sqrt{\frac{l^2+2h^2}{2}}$

$\bar{r}_{CE} = \begin{vmatrix}0\\0\\h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}l/2\\-l/2\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-l/2\\l/2\\h\end{vmatrix} \rightarrow r_{CE} = \sqrt{\frac{l^2+2h^2}{2}}$

$\bar{r}_{BE} = \begin{vmatrix}0\\0\\h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}l/2\\l/2\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-l/2\\-l/2\\h\end{vmatrix} \rightarrow r_{BE} = \sqrt{\frac{l^2+2h^2}{2}}$

$\bar{r}_{AE} = \begin{vmatrix}0\\0\\h\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}-l/2\\l/2\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}l/2\\-l/2\\h\end{vmatrix} \rightarrow r_{AE} = \sqrt{\frac{l^2+2h^2}{2}}$ }

$\bar{e}_z$: $\dfrac{4Fh}{\sqrt{\frac{l^2+2h^2}{2}}} - mg = 0 \iff F = \dfrac{mg\sqrt{l^2+2h^2}}{h\,4\sqrt{2}}$

* Bestäm tryckkraften P, på varje länk

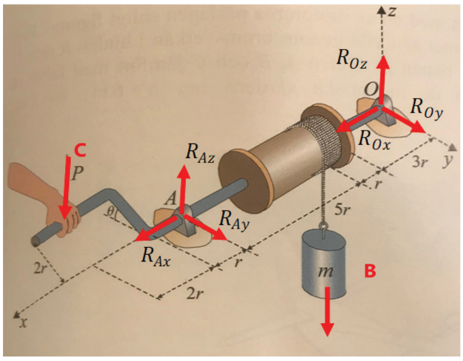
Detta innebär att vi vill veta x-komp eller y-komp av S, dvs kraften som finns i varje länk. $F_x = F_y$

$$P = \bar{F}_{CE}\cdot\bar{e}_x = \bar{F}_{CE}\cdot\bar{e}_y = \bar{F}_{BE}\cdot\bar{e}_x = \bar{F}_{BE}\cdot\bar{e}_y = \dots =$$

$$= -\frac{mg}{h}\,\frac{\sqrt{l^2+2h^2}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{-l/2}{\sqrt{l^2+2h^2}\,/\sqrt{2}} = \frac{mg\,l}{h}\,\frac{\sqrt{l^2+2h^2}}{4\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{l^2+2h^2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{mg}{8}\,\frac{l}{h}}}$$

Uppgift 6.34



Givet: Se figuren, θ, $P /\!/ \bar{e}_z$

Söker: i) Tryckkraften P ii) Reaktionskrafterna $\bar{R}_O$ och $\bar{R}_A$

Lösning

- Bestäm koordinaterna till punkterna A, B, C

$$\bar{r}_{OA} = r(9,0,0) \qquad \bar{r}_{OB} = r(4,1,0) \qquad \bar{r}_{OC} = r(12, -2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

- Kraftjämvikten ger

$$\begin{aligned}
F_x :& \quad R_{Ax} + R_{0x} = 0 \quad * \rightarrow \quad R_{Ax} = R_{0x} = 0 \\
F_y :& \quad R_{Ay} + R_{0y} = 0 \quad * \rightarrow \quad R_{Ay} = R_{0y} = 0 \\
F_z :& \quad R_{Az} + R_{0z} - mg - P = 0
\end{aligned}$$

* Eftersom vi antar ingen friktion i punkten A och origo, blir reaktionskrafterna i x och y led lika med noll

- Momentjämvikten i origo ger: Reaktionskrafterna i x- och y-led kommer inte att ge upphov till något moment eftersom de är lika med noll.

$$\begin{aligned}
\bar{M}_0 :& \quad \bar{r}_{oB} \times mg(-\bar{e}_z) + \bar{r}_{0A} \times R_{Az}\bar{e}_z + \bar{r}_{0C} \times p(-\bar{e}_z) = \bar{0} \\
& \quad mgr\left([4\bar{e}_x + \bar{e}_y] \times (-\bar{e}_z)\right) - 9rR_{Az}\bar{e}_y + rP\left([12\bar{e}_x - 2\cos\theta\bar{e}_y] \times (-\bar{e}_z)\right) = \bar{0} \\
& \quad mgr(4\bar{e}_y - \bar{e}_x) - 9rR_{Az}\bar{e}_y + rP(12\bar{e}_y + 2\cos\theta\bar{e}_x) = \bar{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{e}_x :& \quad -mgr + 2rP\cos\theta = 0 \iff P = \frac{mgr}{2r\cos\theta} = \frac{mg}{2\cos\theta} \\
\bar{e}_y :& \quad 4mgr - 9rR_{Az} + 12rP = 0 \\
& \quad 4mgr - 9rR_{AZ} + 12r\frac{mg}{2\cos\theta} = 0 \\
& \quad mg\left(4 + \frac{6}{\cos\Theta}\right) = 9R_{Az} \iff R_{Az} = \frac{mg(4\cos\theta + 6)}{9\cos\theta}
\end{aligned}$$

- Bestäm reaktionskrafterna från z-komponenten av kraftjämvikten kan vi bestämma R_{0z}

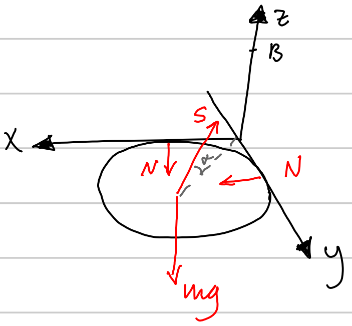
$$\begin{aligned}
& R_{Az} + R_{0z} - mg - P = 0 \\
& \frac{mg(4\cos\theta + 6)}{9\cos\theta} + R_{0z} - mg - \frac{mg}{2\cos\theta} = 0 \\
& R_{0z} = mg\frac{10\cos\theta - 3}{18\cos\theta}
\end{aligned}$$

Svar:

$$\bar{R}_0 = \left(0, 0, mg\frac{10\cos\theta - 3}{18\cos\theta}\right) \qquad \bar{R}_A = \left(0, 0, mg\frac{4\cos\theta + 6}{9\cos\theta}\right) \qquad P = \frac{mg}{2\cos\theta})$$

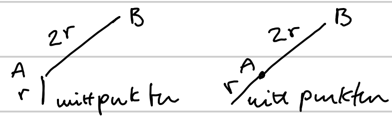
6.35 – Givet: se figuren, homogen klot, R

Söker: Normalkrafterna från varje vägg



Lösning

* Frilägg kroppen och definiera ett koordinatsystem
* Vilken av dessa verkar troligast?



Så när bollen är i jämvikt då står mittpunkten, A och B i en rät linje. Om man gör fel här, då får man fel kraftekv

* Ställ upp jämviktekvationen

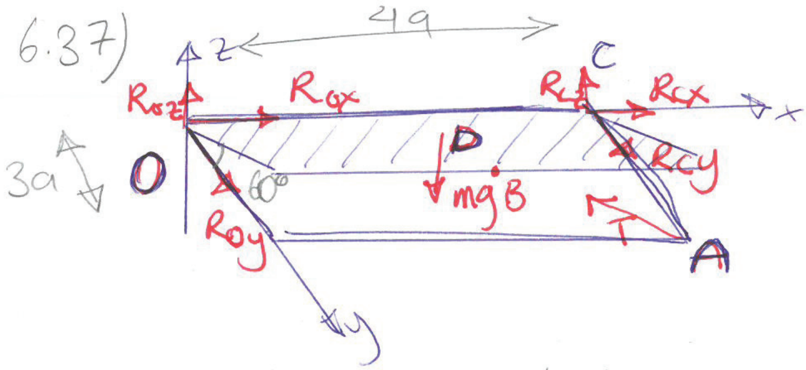
$\uparrow$: $S\sin\alpha - mg = 0 \leftrightarrow S = \dfrac{mg}{\sin\alpha} = \left\{ ? = \sqrt{7}\,r \quad \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \right\} = \dfrac{3mg}{\sqrt{7}}$

xy planet: $S\cos\alpha\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_y\right) + N\bar{e}_x + N\bar{e}_y = \bar{0}$

$$\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{2}} = N \leftrightarrow N = \frac{3mg}{\sqrt{7}}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{mg}{7}}}$$

Eftersom figuren är symetrisk i xy planet då måste normalkrafterna ha samma belopp.

6.37)



(observera lösningen i lösningsförslaget på nätet är fel. Kan kontrolleras genom att se att M_O är inte lika med noll för alla koordinater)

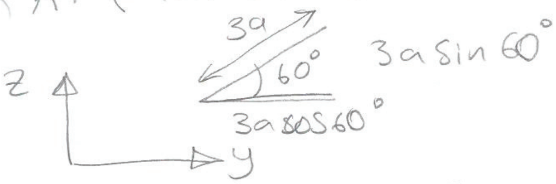
Givet: se figuren, lätt stav

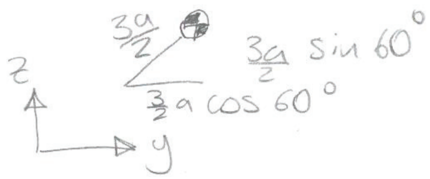
Sökes: Tryckkraften T

Lösning

* Frilägg kroppen & markera krafterna & det koordinatsystemet

A: $(4a, 3a, 0)$ B: $\left(2a, \frac{3}{2}a, \frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)$ D: $\left(2a, \frac{3}{2}\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$





* Bestäm $\bar{R}_{OB}$ & $\bar{R}_{AD}$

$\bar{R}_{OD} = \left(2a, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$\bar{R}_{AB} = \begin{pmatrix} 2a \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -\frac{3}{2}a \\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}a \end{pmatrix} \rightarrow \bar{e}_{AB} = \frac{\left(-2, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{13}}$

* Ställ upp jämviktsekvationerna

$\uparrow \bar{e}_z: \quad R_{Oz} + R_{Cz} - mg + T\bar{e}_{AB}\cdot\bar{e}_z = 0$

$\rightarrow \bar{e}_x: \quad R_{Ox} + R_{Cx} + T\bar{e}_{AB}\cdot\bar{e}_x = 0$ } Avvakta

$\searrow \bar{e}_y: \quad R_{Oy} + R_{Cy} + T\bar{e}_{AB}\cdot\bar{e}_y = 0$

$\bar{M}_O = 4a\bar{e}_x \times (R_{Cy}\bar{e}_y + R_{Cz}\bar{e}_z) + \underbrace{\left(2a\bar{e}_x + \frac{3}{4}a\bar{e}_y + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{e}_z\right)}_{\bar{R}_{OD}}$

$\times -mg\bar{e}_z + \underbrace{(4a\bar{e}_x + 3a\bar{e}_y)}_{R_{OA}} \times T\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\bar{e}_x - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{13}}\bar{e}_y + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\bar{e}_z\right)$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{vi vill inte} \\ \text{räkna fram} \\ \text{vad } R_{Cy} \,\&\, R_{Cz} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{vi kollar bara} \\ \text{på } M_{Ox} \end{array} \right\} = \bar{0}$

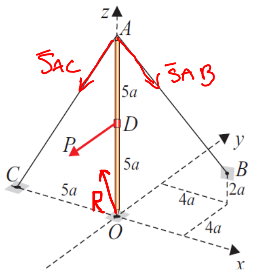
$M_x = \frac{-3}{4}amg + \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}aT = 0 \longrightarrow T = \sqrt{\frac{13}{3}}\frac{mg}{6}$

För att systemet ska vara i jämvikt, ska momentet i alla punkter & koordinater vara lika med noll. Det inses lätt att lösningsförslaget på nätet inte uppfyller detta.

Tentamen - 20150608 Teknisk fysik SG1112

Problem

1)



En vertikal mast OA påverkas av en horisontell kraft med beloppet P i punkten D som ligger i mitten på masten. Denna kraft är parallell men motriktad $y-$axeln. Masten hålls i jämvikt med hjälp av två kablar AB och AC fästa i änden A samt i B och C enligt figuren. Masten är fäst i O med hjälp av en kulled. Bestäm beloppen av spännkrafterna S_1 och S_2 i AB resp AC.

Givet: se figuren ovan, P

Söker: $\bar{S}_1 = \bar{S}_{AB}$ och $\bar{S}_2 = \bar{S}_{AC}$

Lösning

* Frilägg kroppen, markera krafterna och punkteras koordinatsystem.

$A = a(0,0,10)$; $B = a(4,4,2)$; $C = a(-5,0,0)$; $D = a(5,0,0)$

* skriv krafterna i vektor form

$$\bar{S}_{AB} = S_{AB}\frac{\bar{r}_{AB}}{r_{AB}} = \left\{ \bar{r}_{AB} = a\begin{vmatrix}4\\4\\2\end{vmatrix} - a\begin{vmatrix}0\\0\\10\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}4\\4\\-8\end{vmatrix} \right\} = \frac{S_{AB}}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$\bar{S}_{AC} = S_{AC}\frac{\bar{r}_{AC}}{r_{AC}} = \left\{ \bar{r}_{AC} = a\begin{vmatrix}-5\\0\\0\end{vmatrix} - a\begin{vmatrix}0\\0\\10\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}-5\\0\\-10\end{vmatrix} \right\} = \frac{S_{AC}}{\sqrt{5}}(-1,0,-2)$$

* Ställ upp jämviktekvationen

$$\bar{M}_O = \bar{r}_{OA} \times (\bar{S}_{AB} + \bar{S}_{AC}) + \bar{r}_{OD} \times -P\bar{e}_y = \bar{0}$$

$$= a\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & 10 \\ \frac{S_{AB}}{\sqrt{6}} - \frac{S_{AC}}{\sqrt{5}} & \frac{S_{AB}}{\sqrt{6}} & \frac{-2S_{AB}}{\sqrt{6}} - \frac{2S_{AC}}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -P & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

$\bar{e}_x$: $\frac{-10S_{AB}}{\sqrt{6}} + 5P = 0 \longleftrightarrow S_{AB} = \frac{\sqrt{6}\cdot 5P}{10} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2}P}$

$\bar{e}_y$: $\frac{-10S_{AB}}{\sqrt{6}} + \frac{10S_{AC}}{\sqrt{5}} = 0 \longleftrightarrow S_{AC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}S_{AB} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{2}P}$