Föreläsning 1. Matriser.

15 September 2020 16:56

En matris

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a, b, c och d är reella tal.

Ex.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ -e^5 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} = B + A$$

Nollmatrisen

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har att $A + O = A$.

Givet $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, låt $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$.

Vi har att $A + (-A) = A - A$

$$= \begin{bmatrix} a-a & b-b \\ c-c & d-d \end{bmatrix} = O.$$

Ex. Givet två matriser A och B, vad är X när $A + X = B$.?

$$-A + A + X = -A + B$$

$$O + X = -A + B$$

$$X = B - A.$$

Noterar att $A + A = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$.

För varje tal k, om matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, För varje tal k, och matris $A = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$, definieras

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Om $n > 0$, heltal:

$$n \cdot A = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{n}$$

$$\underset{\text{tal}}{0} \cdot A = \underset{\text{matris}}{0}$$

$n < 0$

$$n \cdot A = \underbrace{-A - A - \cdots - A}_{n}$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$,

$A = B$ betyder att $a = e$, $b = f$, $c = g$, $d = h$.

Matrismultiplikation.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{rad } 1 \\ \leftarrow \text{rad } 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{kolonn } 1 & \text{kolonn } 2 \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$$

Produkten AB är matrisen

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}$$ där

$$c_{1,1} = a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{2,1}$$
$$c_{1,2} = a_{1,1} b_{1,2} + a_{1,2} b_{2,2}$$
$$c_{2,1} = a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{2,1}$$
$$c_{2,2} = a_{2,1} b_{1,2} + a_{2,2} b_{2,2}.$$

$AB =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & * (1,2) \\ * (2,1) & * (2,2) \end{bmatrix}$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 1+2 \\ 3+8 & 3+4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Allmänt är $AB \neq BA$.

SATS. Vi har att

1) $C(BA) = (CB)A$ (associativ)

2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$ (distributiv)

3) $(B + C) A = BA + CA$

Matrisen

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

är sådan att $A \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Och vi har att $\mathbb{1} \cdot A = A$.

Matrisen $\mathbb{1}$ kallas identitetsmatrisen.

Definition. Matrisen A är inverterbar om det finns en matris B sådan att

$$AB = \mathbb{1}, \quad \text{och} \quad BA = \mathbb{1}.$$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Matrisen A är inverterbar då

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

och $BA = \mathbb{1}$.

Ex. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

är inte inverterbar. Fördi, låt

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är sådan att $AB = \mathbb{1}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger $a = 1$ och $2a = 0$.

Omöjligt.

-1

· Inversen är unik om den existerar, A.

Ex.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ex. Givet två matriser A och B, och vi har ekvationen

$$AX = B.$$

Först, en liknande ekvation av tal

$$ax = b$$

vad är x? Om $a \neq 0$ då existerar $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Detta ger
$$a^{-1} \cdot ax = a^{-1} \cdot b$$
$$1 \cdot x = a^{-1} b$$
$$x = a^{-1} b.$$

Med matriser. Om A^{-1} existerar då har vi

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$$
$$1 \cdot X = A^{-1} B$$
$$X = A^{-1} B.$$

Notera att vi också kan lösa
$$XA = B.$$
(ger $X = BA^{-1}$, om A^{-1} existerar).