Linjär algebra för gymnasister
fö 5.

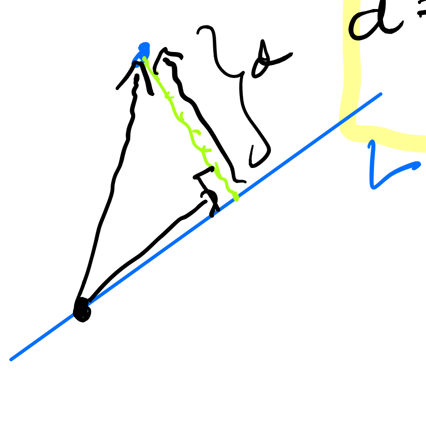
landste@kth.se

Kom ihåg vad vi gjorde förra gången:

•) Skalärprodukten: om $u = (u_1, u_2)$ och $v = (v_1, v_2)$ så är

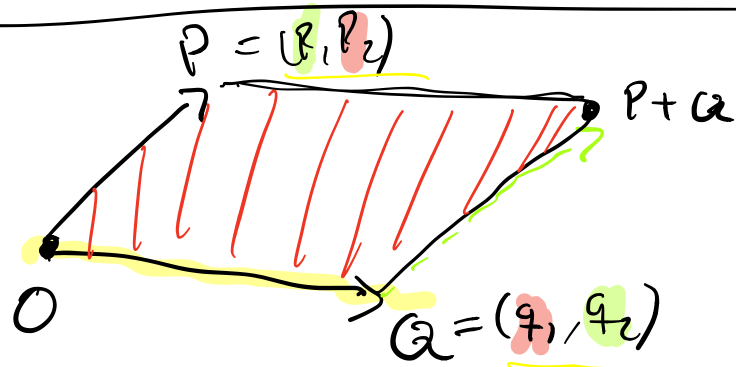
$$\langle u, v \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

•) Avståndsformel: om L är en linje på formen $ax + by + c = 0$ och om $\underline{P} = (p, q)$ så är avståndet mellan L och P lika med



$$\boxed{d = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

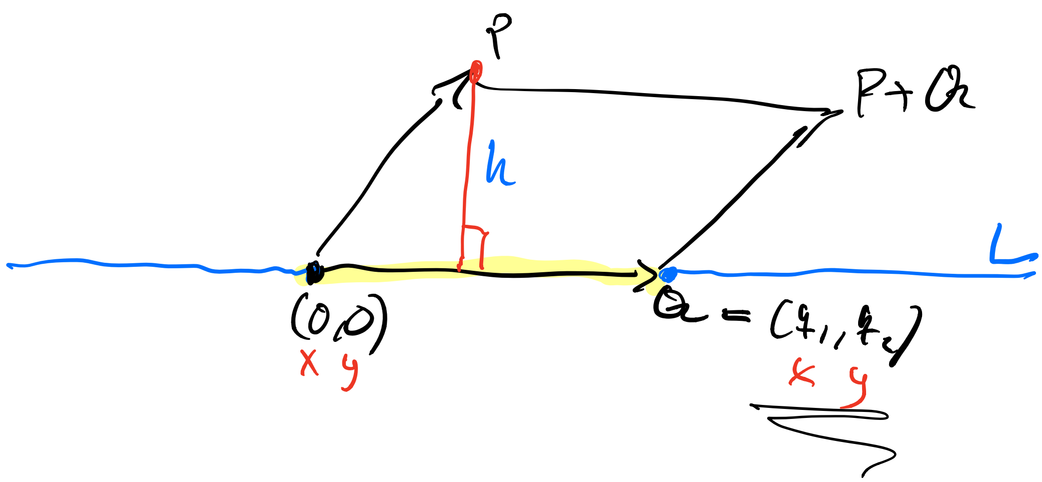
Area av en Parallellogram



SATS. Låt $P=(p_1,p_2)$ och $Q=(q_1,q_2)$ vara två punkter i planet. Arean av den parallellogram som punkterna P, Q, $P+Q$ och origo spänner är

$$|p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1|$$

Bevis: Välj Q som bas.



Ekvation för L.

$$y = kx + m$$

L går genom $(0,0)$ så $m = 0$.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - q_2}{0 - q_1} = \frac{q_2}{q_1}, \quad q_1 \neq 0.$$

så $y = \frac{q_2}{q_1} x \iff q_1 y - q_2 x = 0$

$$\iff q_2 x - q_1 y = 0.$$

så, avståndet h är

$$h = \frac{|q_2 P_1 - q_1 P_2 + 0|}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = \frac{|q_2 P_1 - q_1 P_2|}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Arean ges alltså av "basen x höjden"

$$= |a| \cdot h = |a| \cdot \frac{|q_2 P_1 - q_1 P_2|}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$$

$$= \cancel{\sqrt{q_1^2+q_2^2}} \cdot \frac{|q_2 p_1 - q_1 p_2|}{\cancel{\sqrt{q_1^2+q_2^2}}}$$

$$= |q_2 p_1 - q_1 p_2|.$$

Q.E.D.

Determinanten av en 2x2-matris

Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning, dvs

$$T(a\vec{u} + b\vec{v}) = aT(\vec{u}) + bT(\vec{v})$$

för alla $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ och skalärer $a, b \in \mathbb{R}$. Varje linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$ kan representeras med hjälp av en matris

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ T(1,0) & T(0,1) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

Om $T(1,0) = (a,b)$ och $T(0,1) = (c,d)$.

<u>Definition:</u> Determinanten av matrisen A definieras som talet

$$\det A = \underline{\underline{ad - bc}}.$$

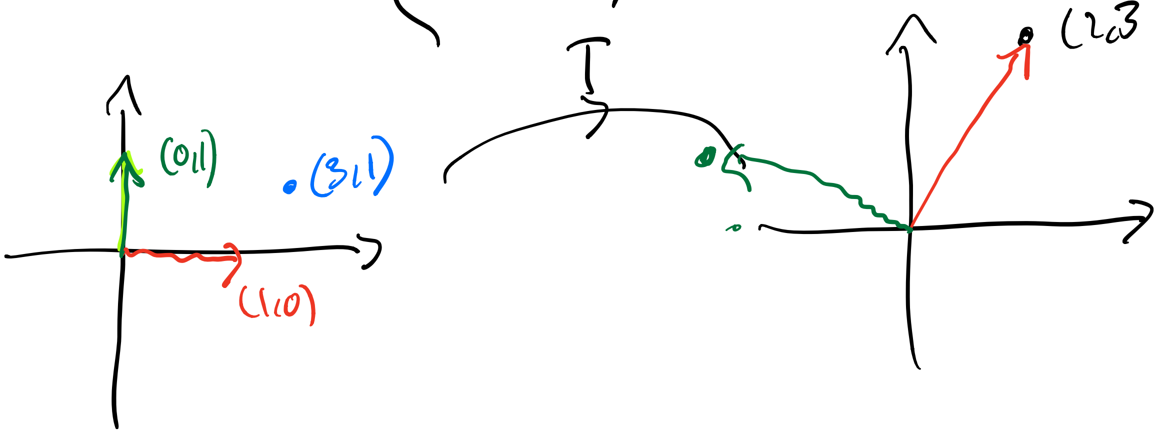
<u>Anmärkning:</u> Ibland skriver man

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

<u>Exempel:</u> Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som uppfyller att $T(1,0) = (2,3)$ och $T(0,1) = (-4,1)$. Beräkna determinanten av T:s matris.

Lösning: Matrisen till T ges av

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

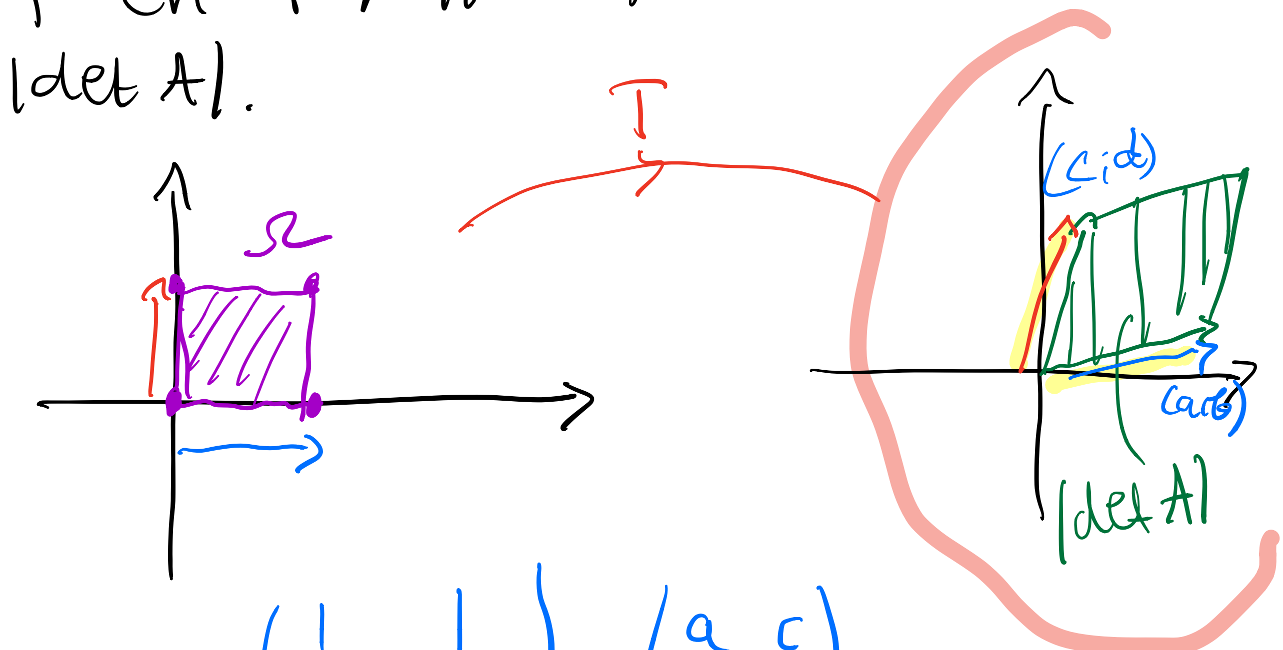


Determinanten ges av

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-4)\cdot 3 = 2+12 = \underline{\underline{14}}.$$

Relation till area.

Proposition 5.2.1. Låt $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning given som matrismultiplikation med matrisen A. Låt Ω vara enhetskvadraten i $\mathbb{R}^2$ med hörn i punkterna $(0,0), (1,0), (0,1)$ och $(1,1)$. Då är bilden av Ω under T en parallellogram med arean $|\det A|$.



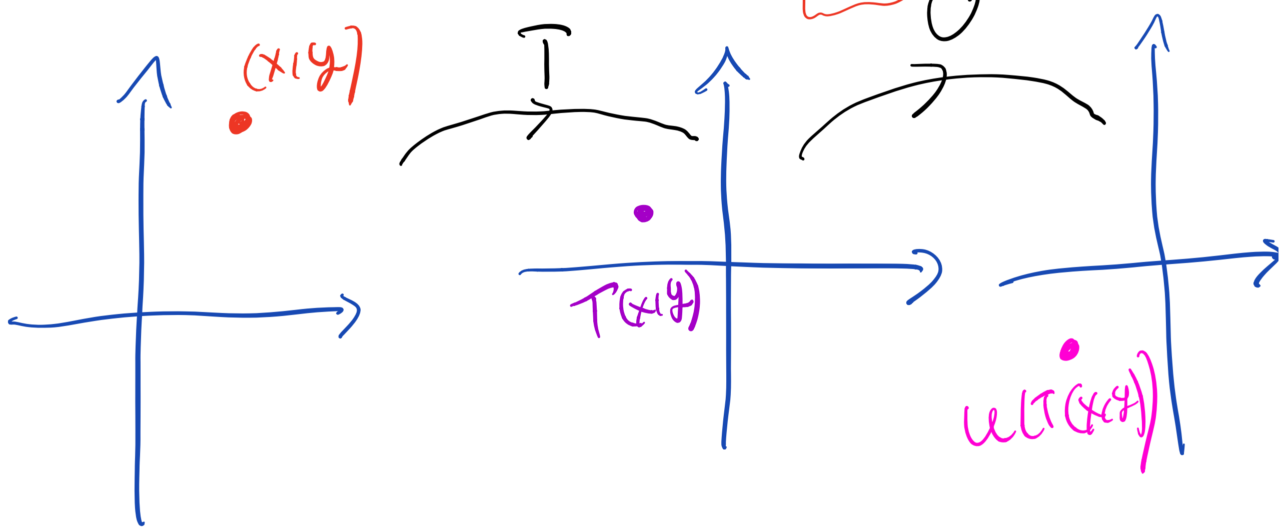
$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ T(1,0) & T(0,1) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$|\det A| = |ad - bc| =$ arean av parallellogrammen.

Sammansatta avbildningar

Definition. Om $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är två linjära avbildningar kan vi definiera deras sammansättning $U \circ T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genom

$$U \circ T(x,y) = U(T(x,y))$$



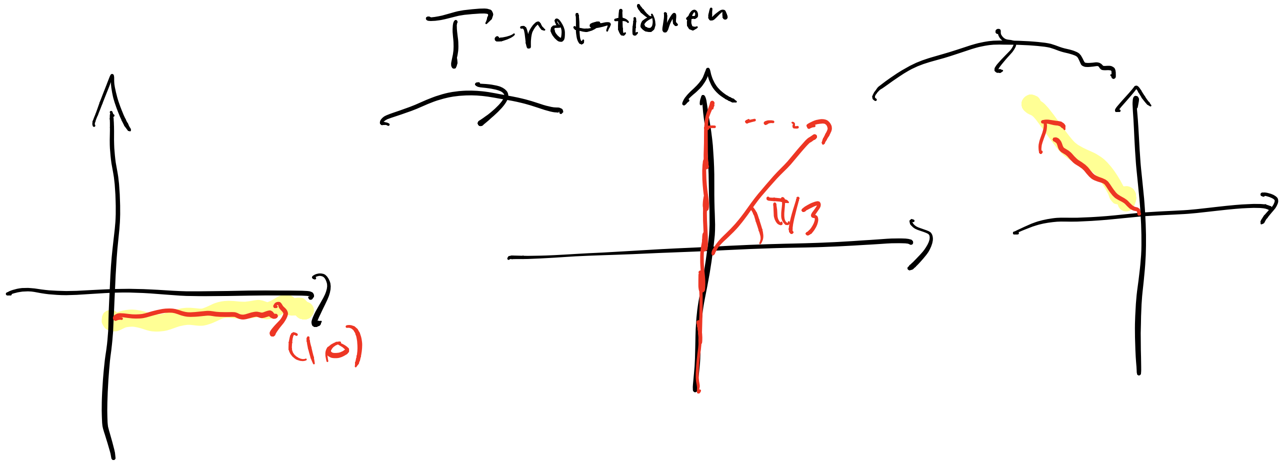
Matris för $U \circ T$?

Proposition: Om A ger avbildningen T och B ger avbildningen U, så ges sammansättningen $U \circ T$ av matrisen $B \cdot A$.

Bevis. övning

$$\left[\ U \circ T(\vec{v}) = U(T(\vec{v})) = U(A\vec{v}) = B \cdot A\vec{v}\ \right]$$

Exempel: Bestäm matrisen för den linjära avbildning som fås om man först roterar planets punkter vinkeln $\pi/3$ moturs och sedan speglar i y-axeln.

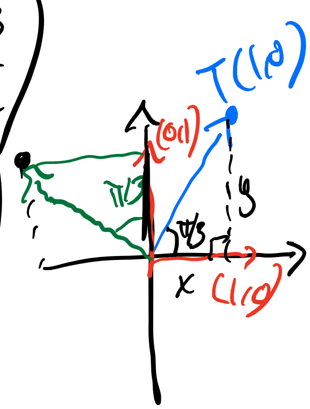


Lösning: Låt T vara rotationen och låt U vara speglingen. Matrisen för T kallar vi A och

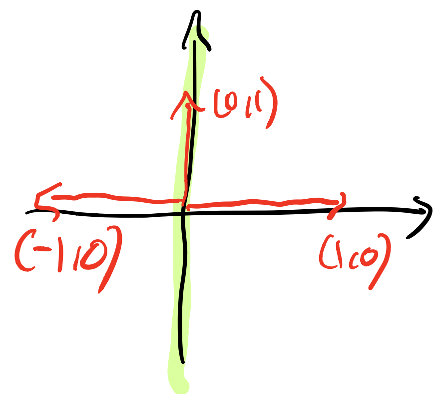
$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ T(1,0) & T(0,1) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$T(1,0) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$T(0,1) = \left(-\sin\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



Avbildningsmatrisen för U kallar vi för B.



$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ U(1,0) & U(0,1) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avbildningsmatrisen för $U \circ T$ är då

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

[Matriserna A och B bestämdes i fö. 3] Δ

Singulära matriser

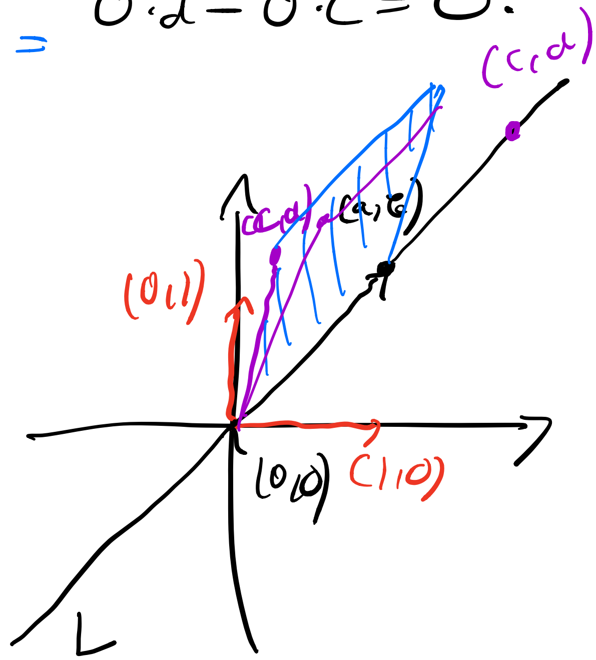
Def. En matris A sägs vara singulär om $\det A = 0$.

Exempel: Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Då är ju $\det A = 0\cdot d - 0\cdot c = 0$.

Finns det fler?

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \\ \uparrow \quad \uparrow & \\ T(1,0) \; T(0,1) & \end{array}$$



Om $T(0,1) = (c,d)$ avbildas på linjen L som går genom origo och (a,b), då är $\det A = 0$.

$$L = \{ t(a,b) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$(c,d) = t(a,b)$, dvs

$$A = \begin{pmatrix} a & t\cdot a \\ b & t\cdot b \end{pmatrix}.$$

Kontroll: $\det A = a\cdot tb - b\cdot ta = 0$. △