Föreläsning 9

Förra gången konstruerade vi, om möjligt, inversen till en matris.

Exempel: Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Inversen ges då av

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{I} \qquad\qquad \underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Så $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Idag: Determinanten !

Vi börjar med att introducera permutationer.

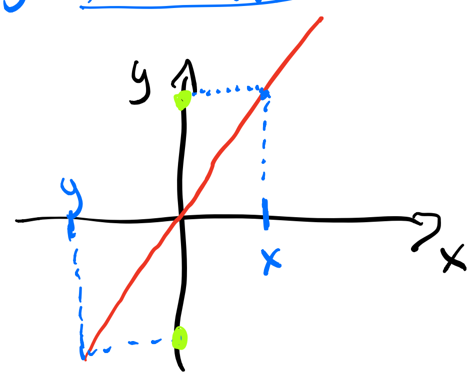
Injektiva funktioner

Definition. En avbildning mellan två mängder T och U, $f: T \to U$ kallas injektiv om

(*) $\quad [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$.

(Alternativt, f är injektiv om $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$. (kontrapositiva påståendet))

Exempel: Tag $f(x) = 4x$ där $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

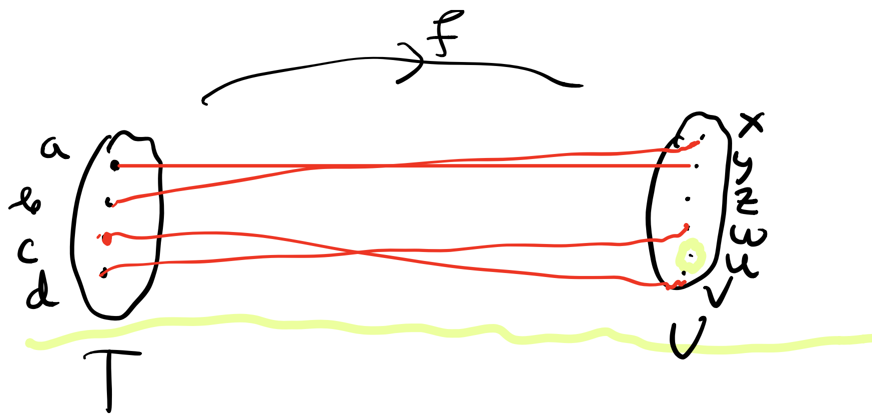


Algebraiskt: Antag att $f(x) = f(y)$ för några x och $y \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f(y)$$
$$\Longrightarrow \quad 4x = 4y$$
$$\Longrightarrow \quad x = y.$$

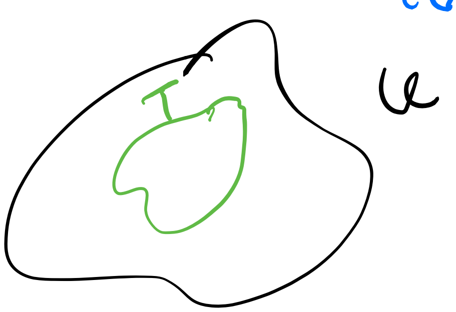
¤

Exempel:



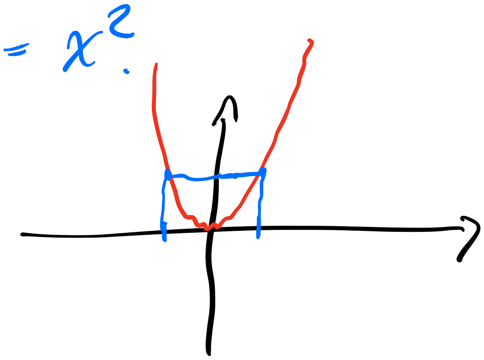
Exempel: Låt U vara en mängd och $T \subseteq U$ en delmängd. Då är inklusionsavbildningen $i: T \to U$ injektiv.

$i(x) = x$ för alla $x \in T$



$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$

Exempel: Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^2$.



Denna är inte injektiv eftersom t.ex

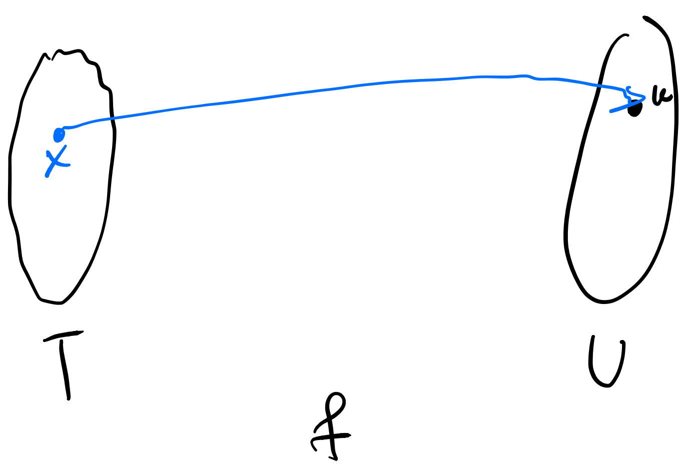
$$f(-1) = f(1),$$
$$(-1)^2 = 1^2$$

men $-1 = 1$.

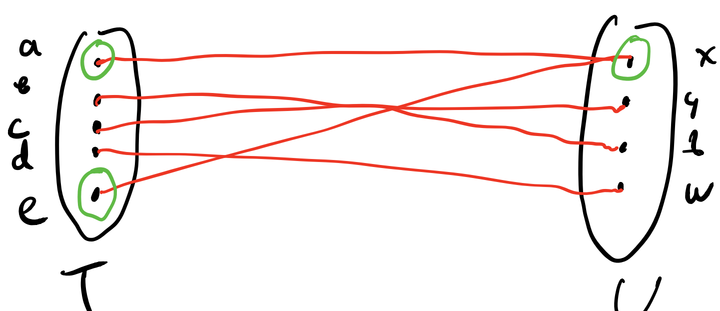
△

Surjektiva funktioner

Definitionen. En avbildning $f: T \to U$ kallas surjektiv om det för alla $u \in U$ finns ett $x \in T$ så att $f(x) = u$.

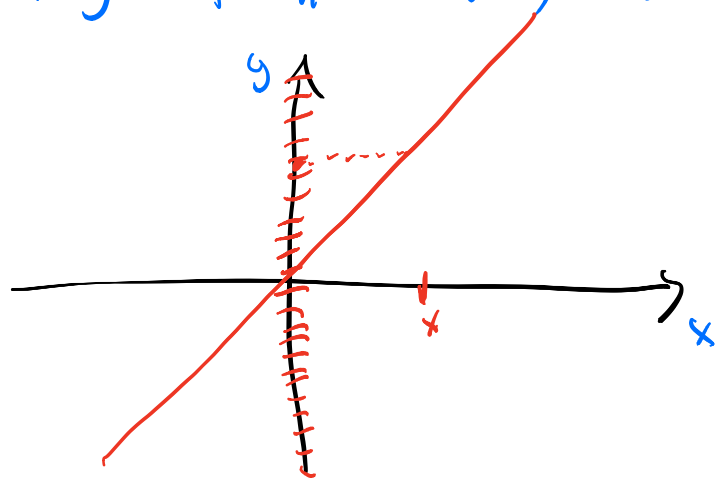


Ex:

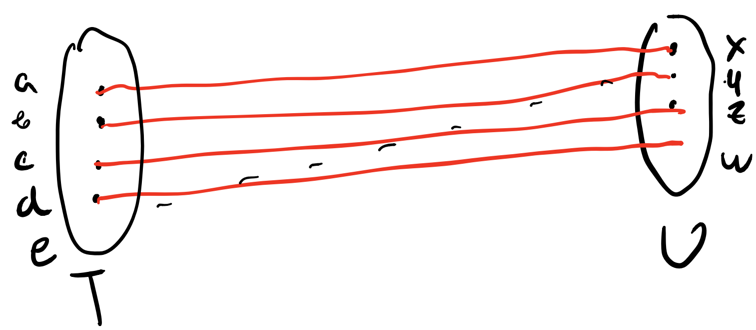


Är surjektiv men ej injektiv

Exempel: Tag $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.



Definition. En funktion som både är injektiv och surjektiv kallas bijektiv.



Exempel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$.

Lemma. Om $f: T \to U$ är en avbildning och T är ändlig så gäller

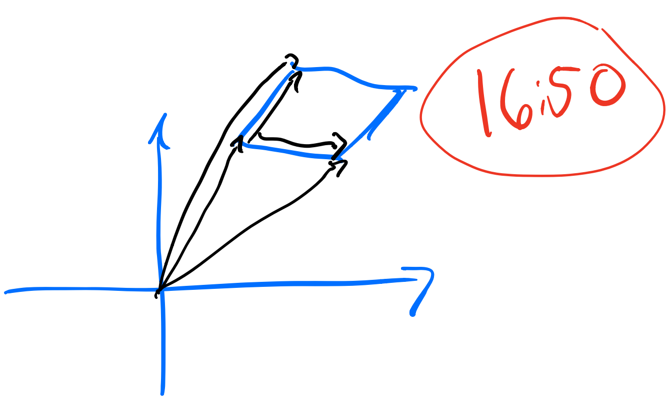
(i) Om f är injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

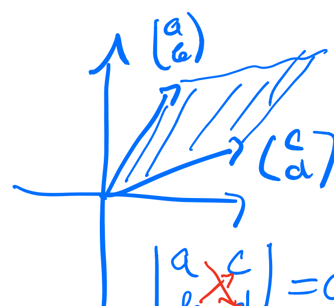
(ii) Om f är surjektiv $\Rightarrow$ f är injektiv.

Bevis. Övning.

Permutationer

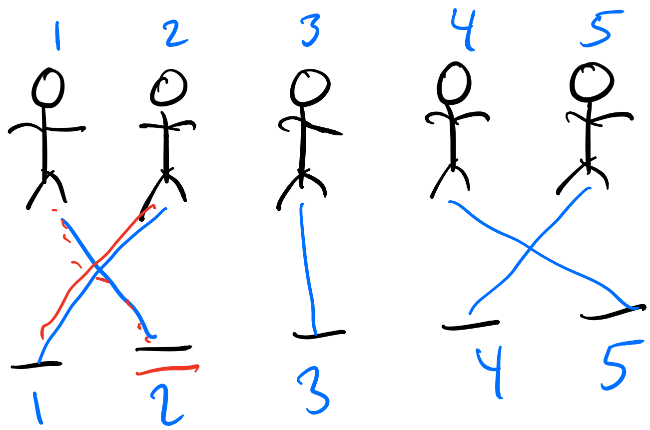
Def. Låt $n \geq 1$ vara ett fixerat heltal. En permutation av talen $T_n = \{1, \dots, n\}$ är en bijektiv avbildning $\sigma: T_n \to T_n$.





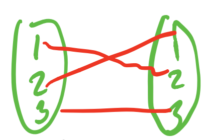
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Mängden av alla permutationer av talen $\{1, \dots, n\}$ skrivs $\mathfrak{S}_n$ (eller S_n) och kallas den symmetriska gruppen på n element.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi skriver en permutation $f : T_n \to T_n$ som en matris



$\sigma(1) = 2$
$\sigma(2) = 1$
$\sigma(3) = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

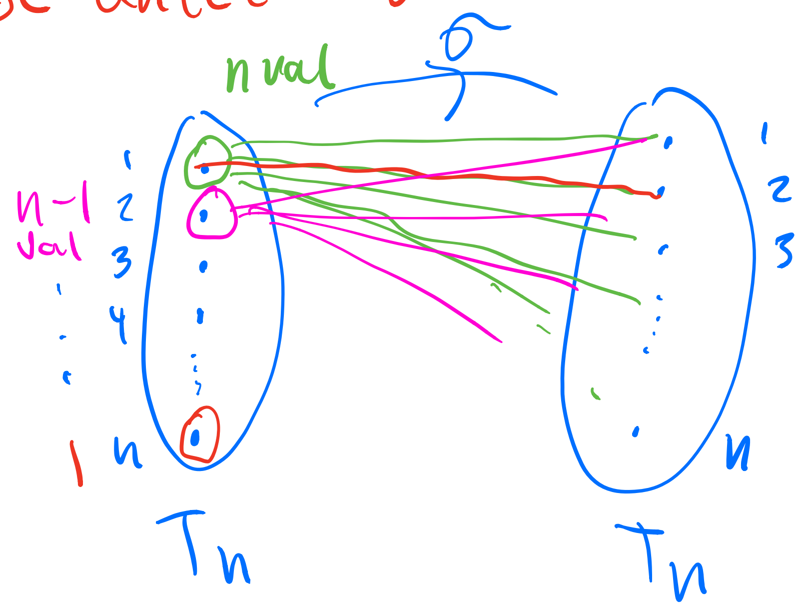
Exempel:

$$\mathfrak{S}_3 = \Big\{ \overset{Id}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}, \overset{\sigma_{1,2}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}, \overset{\sigma_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_{1,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \Big\}$$

SATS. Antalet element i $\mathfrak{S}_n$ är
$n! = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$

Bevis. Se anteckningarna.

Skiss:



Multiplikationsprincipen ger att antalet bijektioner är $n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

Inversioner

Definitionen. Låt σ vara en permutation av $\{1,\dots,n\}$. En inversion är ett talpar (i,j) med $1\le i<j\le n$ så att $\sigma(i)>\sigma(j)$

$2<4$

Exempel:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & 5 & \boxed{6} \\ 1 & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{2} & 4 & \boxed{3} \end{pmatrix} \in S_6$$

$\sigma(2)$ $\sigma(4)$

$3 < 6$

$\sigma(3) = 6$

$\sigma(6) = 3$

$5 > 2$

$\sigma(2) > \sigma(4)$

så

$\sigma(3) > \sigma(6)$

$\underline{(3,6)}$

Så $(2,4)$ är en inversion.

Δ

Definition. Låt σ vara en permutation

Tecknet (signum) av permutationen definieras som

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{om antalet inversioner är jämnt.} \\ -1 & \text{om udda.} \end{cases}$$

Ex: i) $\operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = 1$ ty 0 inversioner

$1<3$ $2<3$

$$\operatorname{sign}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = -1 \text{ ty } 3 \text{ inversioner}$$

$2>1$

$[(1,2), (1,3), (2,3)]$

3 stycken.

Determinanten

Def. Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times n$ matris. Determinanten av A definieras som talet.

(*) $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Exempel: Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. ← 2x2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Notera att $n = 2$. $\quad S_2 = \left\{ \underset{\varepsilon}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}.$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$$

$$= \text{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) a_{1\varepsilon(1)} a_{2\varepsilon(2)}$$

$$+ \text{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$$

$1 < 2$

$2 > 1$

$$= \underline{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Exempel: Beräkna $\det A$ om $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$S_3 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{}^{Id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \overset{\sigma_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_{1,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$= \underbrace{\text{sign}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right)} \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}_{\text{element i } A} + \underbrace{\text{sign}\begin{pmatrix} \boxed{1\,2} & 3 \\ 2\,1 & 3 \end{pmatrix}}_{} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 1$

$$+ \underbrace{\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}} a_{11} a_{23} a_{32} + \dots)$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}.$$

Proposition. Om
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}.$$

Bevis. Övning. (Se kompendiet)

Skiss: Sista raden har bara nollor utom elementet a_{nn}. Då är alla termer med $a_{n\sigma(n)}$ $=0$ i (*) ovan utom då $\sigma(n) = n$.
I näst sista raden är alla element utom $a_{n-1,n-1}$ och $a_{n-1,n}$ noll så termer i (*) med $a_{n-1\,\sigma(i)}$ $=0$ utom då $i = n-1$ och $i = n$. Upprepas detta fås $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

$\square$