F1: Matrisaritmetik

* algebra: inför objekt + räkneregler

<u>ex</u>: vanliga tal $1, \pi, \frac{18}{3}, \ldots$

räkneregler: addition, multiplikation, ...

* finns det andra sätt att införa objekt + räkneregler?

> en 2×2-matris är fyra reella tal i en rektangel

<u>ex</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Addition av matriser

* två matriser kan <u>adderas</u>
* resultatet blir en <u>ny</u> matris

ex:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5 & 8\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+5 & 2+8\\ 3+2 & 4-1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 10\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

Skalär multiplikation

* en matris och ett reellt tal kan multipliceras med varandra
* resultatet blir en ny matris

ex:

$$5 \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\cdot 1 & 5\cdot 2\\ 5\cdot 3 & 5\cdot 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{bmatrix}$$

allmänt:

$$\boxed{k \cdot \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\cdot a & k\cdot b\\ k\cdot c & k\cdot d\end{pmatrix}}$$

* distributivitet:

$$(k+l)\cdot A = k\cdot A + l\cdot A$$

$$k\cdot (A+B) = k\cdot A + k\cdot B$$

ex:

$$\dots = (1+1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ \dots & \dots\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = (1+1)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

d.v.s. $2A = A + A$ o.s.v.

* märk:

$$A - B = A + (-1)B$$

Nollmatrisen

(jfr. $0\cdot 18 = 0$, $0 + 18 = 18$)

$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ kallas för nollmatrisen

ex:

$$0\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ex:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Matrisekvationer

ex:

$$2X + 4A = 8B$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$$

$$2X = 8B - 4A$$
$$X = 4B - 2A = \ldots = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Element i matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\{a_{ij}\}$ = "element"

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{21} = 3$

Matrismultiplikation

* två matriser A, B kan multipliceras med varandra ← linjär algebra
* resultatet blir en ny matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} b_{22} \\ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

c_{11} = rad 1 i A × kolumn 1 i B

c_{12} = rad 1 i A × kolumn 2 i B

c_{21} = rad 2 i A × kolumn 1 i B

c_{22} = rad 2 i A × kolumn 2 i B

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

*märk:

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} = A \cdot B \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Identitetsmatrisen

(jfr. $1 \cdot 5 = 5$)

$$\boxed{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

* egenskap: $I \cdot A = A = A \cdot I$

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenskaper

* associativitet:

$$(AB)C = A(BC)$$

* distributivitet:

$$A \cdot (B+C) = AB + AC$$

Inverterbarhet

(jfr. $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$)

Matrisen A är inverterbar om det finns en matris B så att $A \cdot B = I = B \cdot A$

* matrisen B kallas för inversen till A

ex: $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Singulära matriser

(jfr. $0 \cdot x \overset{?}{=} 1$)

* en matris som inte kan inverteras, kallas singulär

ex:

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

kan vi hitta a, b, c, d?

nej $\Rightarrow$ nollmatrisen är singulär

Inversen är unik

Notation

Om $AB = I = BA$, så är B inversen till A.

Beteckning: $B = A^{-1}$

$$A \cdot (A^{-1}) = I$$

Matrisekvationer

Bestäm X om $A \cdot X = B$,
givet att A^{-1} existerar.

Multiplicera med A^{-1} från vänster:

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B$$