F2: Matrisaritmetik II

* förra gången:
  2×2-matriser

  <u>ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

* nu: $(m \times n)$-matriser

  m: antal rader

  n: antal kolumner

<u>ex:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 19 \\ 22 & 18 & \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

(3×4)-matris!

* element:
  a_{ij} betecknar elementet på rad i, kolumn j

  <u>ex:</u> $a_{24} = 19$

* <u>ex:</u>

$$\begin{pmatrix} 8 \\ \pi \\ \sqrt{} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ -5 \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

en (4×1)-matris!

Addition av matriser

ex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 & 2+(-2) \\ 8+0 & -5+2 & 3+5 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & -3 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

* addition sker elementvis
* OBS: matriserna måste ha samma "storlek" $m\times n$

Skalär multiplikation

ex:

$$5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 0 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 8 & 5\cdot(-5) & 5\cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 40 & -25 & 15 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

* multiplikation med ett reellt tal k ger en ny matris, där varje element har multiplicerats med k

Summanotation

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

ex: $\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$
$$= 1 + 4 + 9 + 16$$

Matrismultiplikation

$A = (m \times p)$ - matris

$B = (p \times n)$-matris

$C = A \cdot B$ är en $(m \times n)$-matris, vars element är

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

där $i = 1, \dots, m$
$j = 1, \dots, n$

<u>ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$$

$* \; A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3}$

* resultatet?

(2×3)-matrisen $C_{2\times3}$

$$C_{2\times3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 47 & 74 & 60 \\ 26 & 30 & 42 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

* hur fick vi $c_{21} = 26$?

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} \cdot b_{k1}$$

$$= a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} + a_{24} b_{41}$$

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

$$= 12 + 12 + 2 + 0$$

$$= 26$$

* hela rad 2 i A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* hela kolumn 1 i B:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* ska "multipliceras" med varandra för att få C_{21}:

$$C_{21} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{(från A)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{(från B)}} =$$

$$= 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

OBS:

$$\boxed{AB \neq BA \text{ i allmänhet}}$$

Invers...

Inverser

Om $A \cdot B = I = B \cdot A$,
så sägs A vara
<u>inverterbar</u>, och B kallas
för <u>inversen</u> till A

Beteckning:

$$A \cdot (A^{-1}) = I = (A^{-1}) A$$

(jfr. $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$)

* OBS: $A_{n \times n}$, $B_{n \times n}$ och $I_{n \times n}$
är kvadratiska matriser
av samma storlek $n \times n$

*

$$I_{n \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{n}$$

n

ex:

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~A~~ på elementform:

$$I = (\delta_{ij}) \text{ där } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

"enhetsmatrisen"

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Longrightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d.v.s. B <u>är</u> inversen till A!

$$B = A^{-1}$$

<u>Ekvationslösning med matriser och inverser</u>

<u>ex</u>: Lös ekv. systemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Skriv som matrisekv.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}}_{A} \begin{pmatrix} z \end{pmatrix}_{3\times1} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

Multiplicera med B från vänster:

$$\underbrace{\underbrace{B\cdot A}_{I_{3\times3}}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

(jfr. $5x = 8 \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot 5x = \frac{1}{5}\cdot 8$)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d.v.s. lösningen är

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Allmänt: $Ax = b$

$$\Rightarrow (A^{-1}) A x = A^{-1} b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1} b$$

(<u>Om</u> invers till A existerar!)