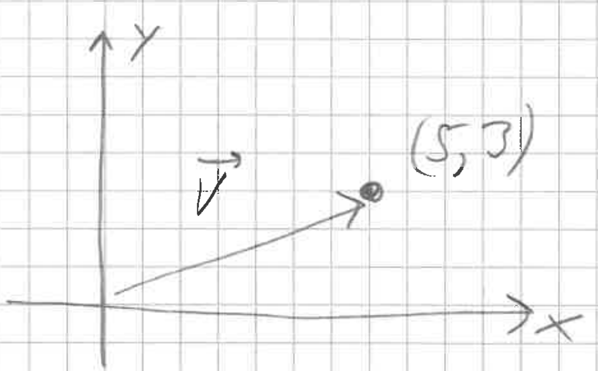
F4: Geometri i planet

$\mathbb{R}^2$ = mängden av alla punkter (x, y), d.v.s. hela planet

kolumnvektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kan identifieras med punkten med koordinaterna (x, y) i planet

ex:



* konvention: "ortsvektorn" startar alltid i origo, d.v.s. "pekar på" den punkt vars koordinater sammanfaller med ortsvektorns komponenter:

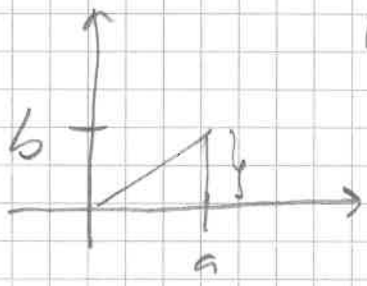
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Skalärprodukt

Längden av en vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

(bevis: Pythagoras sats)



Skalärprodukt mellan två vektorer:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{v} = a \cdot c + b \cdot d}$$ (definition)

Skalärprodukten med sig själv:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

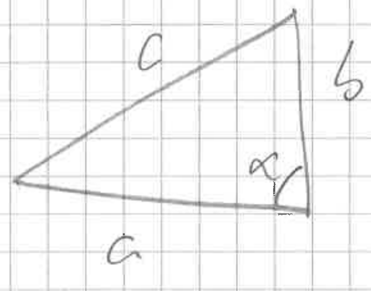
$$\boxed{\vec{u} \bullet \vec{u} = a^2 + b^2 = \|\vec{v}\|^2}$$

Räkneregler

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{u}+\vec{v}) \bullet \vec{w} &= \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w} \\ (t\vec{u}) \bullet \vec{v} &= t(\vec{u} \bullet \vec{v}) \end{aligned}}$$

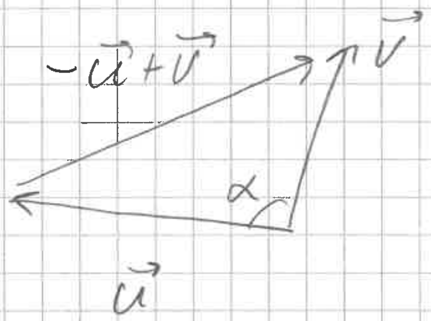
Alternativ formel för skalär produkt

cosinussatsen:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Rita in vektorer:



$$\|-\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

$$(\vec{v}-\vec{u})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

$$-2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$$

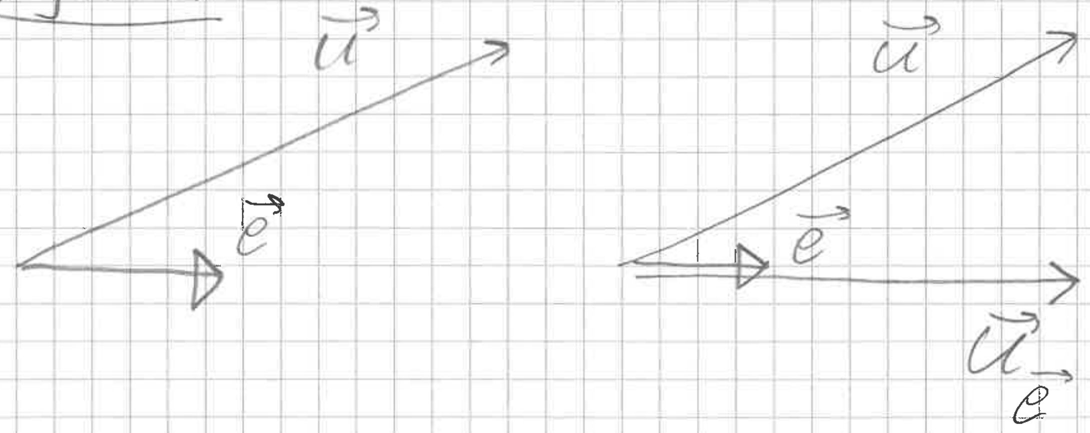
$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)}$$

$\measuredangle$ Följdsats: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ (ortogonala vektorer) $\Leftrightarrow$ $\alpha = 90^\circ$ (eller ngn av vektorerna är noll)

ex: $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot(-10) + 5\cdot 4 = 0 \Rightarrow \vec{u}$ och $\vec{v}$ vinkelräta!

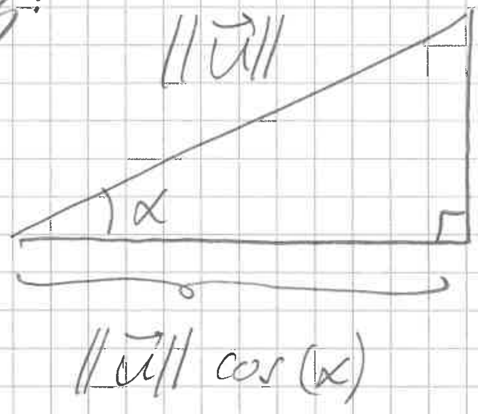
Projektion



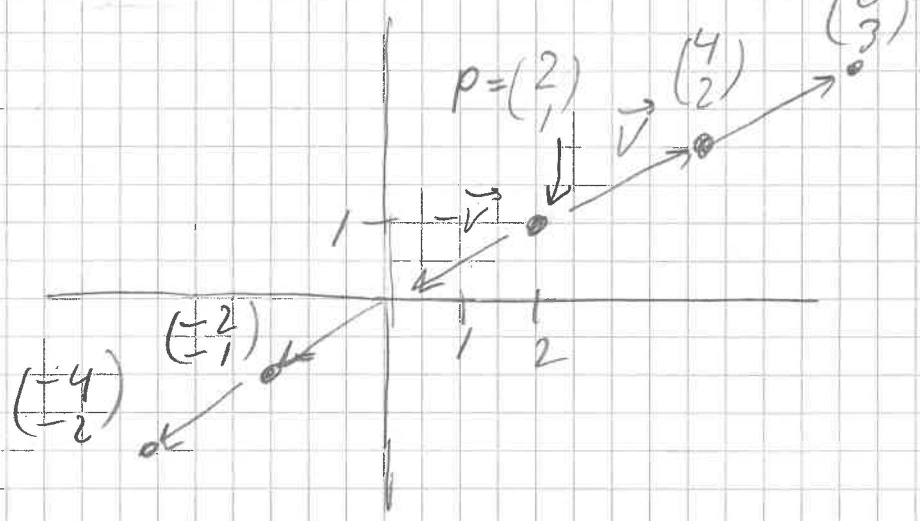
* givet: vektor $\vec{u}$ och enhetsvektor $\vec{e}$: $\|\vec{e}\| = 1$
* problem: vi vill projicera vektorn $\vec{u}$ på den riktning som ges av vektorn $\vec{e}$
* formel:

$$\boxed{\vec{u}_{\vec{e}} = \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{e})}_{\text{längd}} \; \underbrace{\vec{e}}_{\text{riktning}}} = (\|\vec{u}\| \cdot \cos\alpha)\, \vec{e}$$

* motivering:



Linjer: parameterform



rita ut punkterna

$\binom{2}{1} - 2\vec{v}$ $\qquad \vec{v} = \binom{2}{1}$

$\binom{2}{1} - \vec{v}$

$\binom{2}{1}$

$\binom{2}{1} + \vec{v}$

$\binom{2}{1} + 2\vec{v}$

$\binom{2}{1} + 3\vec{v}$

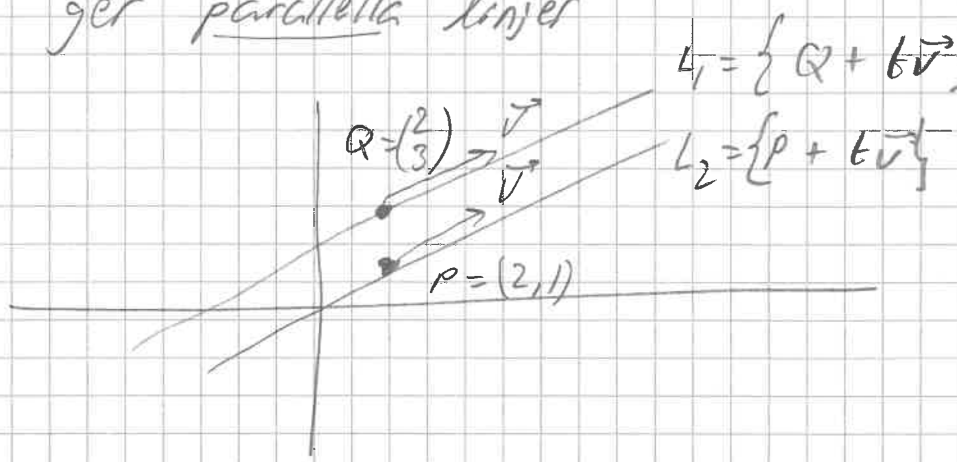
alla dessa punkter ligger på linjen L

> mängden av alla punkter
> $L = \{ P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$
> ger hela linjen genom P
> och med riktningsvektor $\vec{v} \neq \vec{0}$

I exemplet: $P = \binom{2}{1}$ $\quad \vec{v} = \binom{2}{1}$

Ej unikt: $P = \binom{0}{0}$ $\quad \vec{v} = \binom{4}{2}$ ger samma linje!

* samma riktningsvektor men olika punkter ger parallella linjer



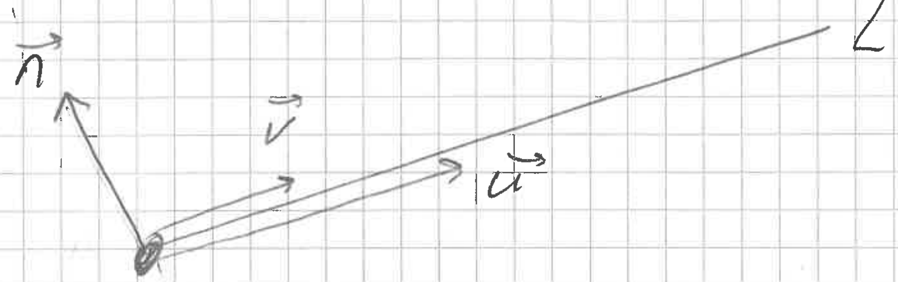
* exempel: $P = \binom{3}{8}$ och $\vec{v} = \binom{5}{-2}$

ger linjen

$$L = \{P + t\vec{v}\} = \left\{\binom{3}{8} + t\binom{5}{-2}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 + 5t \\ 8 - 2t \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Normallinjer



* Om $\vec{v}$ och $\vec{u}$ är två olika riktnings-vektorer till samma linje, så är de multiplar av varandra:

Det finns något tal s så att

$$\vec{v} = s \cdot \vec{u}$$

* Om vektorn $\vec{n}$ är vinkelrät mot linjen L, så är $\vec{n}$ ortogonal mot alla riktningsvektorer:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (s\vec{u}) = s\overbrace{(\vec{n} \cdot \vec{u})}^{=0} = 0$$

* Normallinjen N till linjen L är mängden av alla punkter

$$N = \{ P + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

där P är skärningspunkten och $\vec{n}$ är en "normalvektor" till L:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\vec{n} \neq \vec{0})$$

Linjer i ekvationsform

Mängden av alla punkter

$$L = \{ (x, y) \mid ax + by + c = 0 \}$$

beskriver en linje i $\mathbb{R}^2$

* ekvationen $ax + by + c = 0$ är inte unik (kan multipliceras med en konstant)

Parameterform till ekvationsform och tvärtom

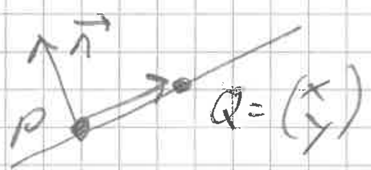
* givet: $L = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}$

* steg 1: hitta en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ t.ex.

* linjen blir $ax + by + c = 0$

  där $c = -ap_1 - bp_2$

<u>motivering</u>:



$$0 = \vec{n} \cdot (Q - P) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} = a(x - p_1) + b(y - p_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = ax + by - ap_1 - bp_2$$

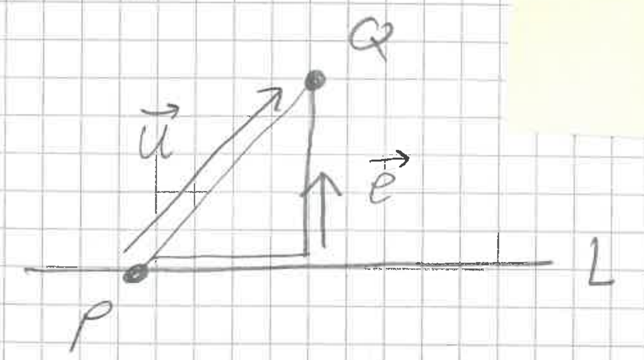
<u>observation</u>: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ger <u>alltid</u> en normalvektor (konstanten c "parallellförflyttar" linjen, d.v.s. ändrar $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$)

* givet: $ax + by + c = 0$
* hitta punkt på linjen: $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$
* linjen blir $L = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}$

riktningsvektor enligt ovan

Avstånd mellan linje och punkt

$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ = given pkt



linjen L: $ax + by + c = 0$

Hitta kortaste avståndet!

Låt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ vara en pkt på linjen:

$$ap_1 + bp_2 + c = 0 \quad (*)$$

Normalvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Enhetsvektor: $\vec{e} = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

Vektorn $\vec{u} = (Q - P)$ ger inte kortaste sträckan

Vektorn $\vec{u}$ projicerad på den riktning som ges av vektorn $\vec{e}$ ger det kortaste avståndet:

$$\vec{u}_{\vec{e}} = (\vec{u} \cdot \vec{e})\,\vec{e}$$

Längden är $l = |\vec{u} \cdot \vec{e}|$, där

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = (Q - P) \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\|\vec{n}\|}\left(Q \cdot \vec{n} - P \cdot \vec{n}\right)$$

Vi behöver

$$Q \cdot \vec{n} = aq_1 + bq_2$$

$$P \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ap_1 + bp_2 \overset{(*)}{=} -c$$

Därmed:

$$\boxed{l = \frac{|Q \cdot \vec{n} - P \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$