Skapat av
Nelly Wannberg &
Ida Fantenberg Niklasson

UTFORSKANDE LEKTIONER MED GEOGEBRA

Ett planeringsmaterial till lärare för att ge eleverna en möjlighet att gå från ritual till utforskande

EN BESKRIVNING AV MATERIALET

Inledning

Detta material är en del av ett avslutande examensarbete för programmet Civilingenjör och Lärare på Kungliga Tekniska Högskolan i Stockholm. Syftet med materialet är att inspirera och utmana lärare till att utveckla sin matematikundervisning med hjälp av aktiviteter i GeoGebra. Materialet skapades för att stötta läraren i det kompensatoriska uppdraget och ge alla elever möjlighet att, i små steg, röra sig från ett processorienterat lärande till att arbeta utforskande. Materialet ska underlätta planeringsarbetet genom att föreslå möjliga vägar att ställa frågor och skapa uppgifter för att gå mot utforskande lärande.

Att arbeta på ett utforskande sätt

Målet med undervisningen är att eleverna ska lära sig matematik, det vill säga de ska kunna delta i den matematiska diskursen (Sfard, 2007). Detta sker genom att gradvis avritualisera lärandet från det processorienterade upprepandet av procedurer i kända situationer till ett objekts- och resultatorienterat användande av procedurer i nya situationer. Det processorienterade lärandet, där proceduren står helt i centrum, kallar vi för ritual, och eleven går mot utforskande när lärandet avritualiseras (Lavie et al., 2019). Vi har valt att operationalisera lärande på detta sätt eftersom GeoGebra är ett verktyg som har potential att användas i syfte att gå mot utforskande lärande, men som också lätt kan bli en genväg för eleverna att upprepa ritualer.

Materialet är därför utformat för att tipsa om hur undervisningen kan organiseras för att alla elever möjlighet att ta steget från processorienterade handlingar till utforskande arbete. För att bespara läraren tiden och arbetet det kräver att skapa egna aktiviteter i GeoGebra utgår materialet från de färdiga aktiviteter som finns under *Resurser* på GeoGebras hemsida.

Innehåll

- **Flödesschema för planering av en lektionsaktivitet**
  Lättöverskådlig mall för planering av uppgifter och frågor till färdiga aktiviteter i GeoGebra.

- **Exempel på en lektionsaktiviteter**
  Två exempel på lektioner som planerats med hjälp av materialet.

- **Fördjupande teori**
  En fördjupande guide till kommognition och lärande genom upprepning av rutiner, att gå från ritualer till utforskande.

FLÖDESSCHEMA FÖR PLANERING

VAD

1. Välj en aktivitet

Gå in på GeoGebras hemsida och leta fram en aktivitet du vill använda i klassrummet. https://www.geogebra.org/materials

VARFÖR

2. Bestäm syfte och mål

Vad är syftet med aktiviteten och vad ska eleverna lära sig? Tänk på att inkludera avritualisering i syftet.

Formulera Uppgift

3. Formulera en uppgift till aktiviteten

Skapa en uppgift som innehåller en eller flera frågor kopplade till aktiviteten. Använd begreppen till höger för att formulera uppgiftsfrågorna, men observera att alla begrepp inte behöver användas.

HUR

4. Använd uppgiften i en lektion

Bestäm tidsåtgång och arbetssätt för uppgiften. Se nästa sida för mer planeringsstöd för lektionen.

Flexibilitet

Formulera en fråga som uppmuntrar olika lösningar eller jämförelse av olika lösningar. Det kan ske genom att till exempel formulera en fråga sådant att det finns flera olika möjliga sätt att lösa uppgiften på.

Sammankoppling

Formulera frågor där de behöver dra nytta av tidigare kunskaper, så att dessa kan sammankopplas med kunskaper i det aktuella området. Detta kan ske genom att lösningen har flera delsteg, där resultatet av ett delsteg är input i ett senare delsteg.

Tillämplighet

Formulera en fråga där eleverna behöver använda tidigare kunskaper i en ny situation. Det kan ske genom att eleverna ges möjligheten att tillämpa sina kunskaper i en verklighetsbaserad situation.

Elevens agentskap

Formulera frågor där eleverna själva måste komma på vilken metod de ska använda. Kan avslutas med att de ska berätta för en kamrat hur de tänkt.

Objektifiering

Involvera en fråga som tar fokus från GeoGebra (fysiskt föremål) till det matematiska innehållet (matematiskt objekt). Det matematiska objektet kan kännas igen som ett substantiv (t.ex. andragradsfunktionen). Detta kan göras genom att ställa frågor som fokuserar på det matematiska innehållet.

Underbyggnad

Involvera en utvärderande fråga i uppgiften, som handlar om varför elevens svar är det rätta svaret? Få eleven att fokusera på svaret (resultatet) istället för delstegen i lösningen (proceduren).

FLÖDESSCHEMA FÖR PLANERING

4. Använd uppgiften i en lektion

Här finns lite extra stöd för att planera lektionen, i form av en checklista med saker som kan vara bra att tänka på.
Du kan eventuellt gå tillbaka och ändra uppgiften du konstruerat efter att du definierat ramarna för lektionen. Du kan kryssa i flera rutor på samma rad, men du kan också enbart kolla på de olika förslagen för inspiration.

Plats:	[ ] lokal för lektionen är bestämd			
Material:	[ ] finns tillgängligt			
Tidsåtgång:	[ ] en del av lektionen	[ ] hela lektionen		
Arbetssätt:	[ ] individuellt	[ ] par	[ ] grupp	[ ] helklass
Redovisning:	[ ] inlämning	[ ] helklass	[ ] skriva på tavlan	[ ] ingen
Genomgång:	[ ] före	[ ] efter	[ ] inte alls	

Tips!
Använd arbetssättet EPA:
Enskilt, Par, Alla

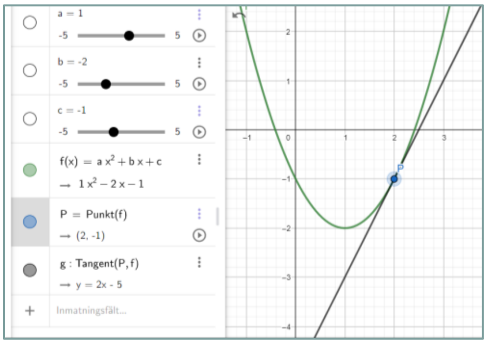
Tips!
TIPS: Använd gärna andra resurser för att få inspiration till uppgifter, till exempel frågor från läroböcker eller gamla nationella prov.

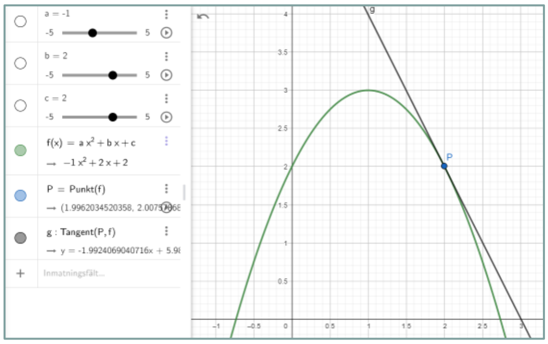
5. Utvärdering

Glöm inte bort att utvärdera hur lektionen gick i efterhand. Gavs alla elever möjlighet till avritualisering?

- Vad fungerade bra?
- Vad kommer du göra annorlunda till nästa gång?

EXEMPEL PÅ EN LEKTIONSAKTIVITET (1)





Steg 1 - Aktivitet

Se till höger.

Steg 2 – Syfte och Mål

- Kurs: Matematik 3c.
- Syftet är att undersöka lutningen i punkter på en andragradsfunktion, för att ge en introduktion till begreppen derivata och tangent. Målet är att lära sig om lutningen i en punkt, och metoder för att bestämma denna.

Steg 3 - Uppgift

- Skapa andragradsfunktionen: $f(x)=x^2-2x-1$. Dra sedan i punkten P och se hur linjen rör sig längs med grafen.
- Derivera $f(x)$ enligt de deriveringsregler ni precis lärt er, dvs. $f'(x)$ = ?.
- Sätt punkten till $P=(2,-1)$. Studera linjen! Vad är linjens ekvation? y=?
- Sätt in punktens *x*-värde i funktionens derivata, dvs. beräkna $f'(2)$. Kan du se något samband mellan värdet på $f'(2)$ och linjens ekvation? — Sammankoppling
- Prova även att sätta punkten till $P=(0,-1)$ och beräkna $f'(0)$? Vad finns det för samban mellan derivatan och linjens ekvation? Prova att derivera linjens ekvation, ser du sambandet tydligare nu? — Sammankoppling
- En extra spännande punkt att prova är $P=(1,-2)$ och $f'(1)$. Hur ser linjen ut? Vad har linjen för *k*-värde? Vad har $f'(1)$ för värde?

Skriv tydligt ner svaren som efterfrågas på alla steg!

- Skapa nu funktionen $g(x)=-x^2+2x+2$.
- Skriv ner linjens ekvation i punkterna: $P=(2,-2)$, $(-1,-1)$, $(1,3)$.
- Beräkna $g'(x)$ och sedan $g'(2)$, $g'(-1)$, $g'(1)$.

Avslutning

- Försök nu att förklara sambandet mellan derivatan, $f'(x)$ och linjens ekvation! Använd följande begrepp: derivata, lutning, andragradsfunktion, linje, punkt. — Sammankoppling, Objektifiering, Underbyggnad
- Om du har linjens ekvation för punkten, hur kan du se att du beräknat derivatan rätt? — Underbyggnad

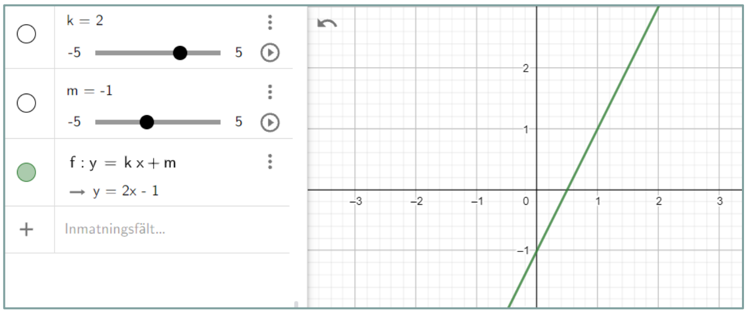
Hitta ett annat par och jämför era beskrivningar. Förklara så att ni förstår varandra!

Steg 4 - Lektion

Beräknad tidsåtgång: 15-30 min

Arbetssätt: Eleverna utför uppgiften tillsammans i par, och diskuterar sedan svaren med ett annat par. Innan eleverna jobbar med uppgiften har läraren en genomgång där de enklaste deriveringsreglerna introduceras, utan att förklara vad begreppet derivata innebär. Därefter jobbar eleverna med uppgiften, och avslutningsvis så sammanfattar läraren syftet med uppgiften och förklarar vad som menas med derivata, ändringskvot och tangent.

EXEMPEL PÅ EN LEKTIONSAKTIVITET (2)



Steg 1 - Aktivitet

Se till höger.

Steg 2 – Syfte och Mål

- Kurs: Matematik 1c.
- Syftet är att sammanbinda en linjär funktion med grafen, och identifiera k- och m-värde. Målet är att lära sig metoder för att bestämma linjära funktioner.

Steg 3 - Uppgift

1. Dra i glidarna och undersök följande:
   a) Vad händer när m-värdet ökar/minskar/är 0?
   b) Vad händer när k-värdet är positivt/negativt/0?
2. Hur förändras funktionens *y-värden* när m ändras? Låt $k = 2$.
   a) Sätt $m = -1$. Rita en värdetabell (se tabell till höger).
   b) Sätt $m = 0$. Hur förändras värdetabellen?
   c) Sätt $m = 1$. Hur förändras värdetabellen?
3. Hur förändras funktionens *y-värden* när k ändras? Låt $m = 0$.
   a) Sätt $k = 1$. Rita en värdetabell (se tabell till höger).
   b) Sätt $k = 2$. Hur förändras värdetabellen?
   c) Sätt $k = 3$. Hur förändras värdetabellen?
   d) Sätt $k = -1$. Hur förändras värdetabellen?
   e) Sätt $k = -2$. Hur förändras värdetabellen?
4. Beskriv sambandet mellan värdena på x & y och k-värdet.
5. Hur kan du bestämma lutningen för en linjär funktion?
6. Hur kan du bestämma räta linjens ekvation?

x	y
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

Flexibilitet
Elevens agentskap

Sammankoppling

Elevens agentskap
Tillämplighet

Steg 4 - Lektion

Beräknad tidsåtgång: 30 min
Arbetssätt: EPA (Enskilt, Par, Alla). Eleverna får göra fråga 1 enskilt. Därefter diskuterar de uppgift 1 i par och gör uppgift 2-6 tillsammans. Slutligen diskuteras del 1-5 i helklass.
Avslutningsvis sker en genomgång där läraren visar hur lutningen kan räknas ut som $k = \Delta y/\Delta x$.
Eleverna har tidigare introducerats för funktionsbegreppet och de har använt värdetabeller.

EN TEORETISK BESKRIVNING

För att förstå materialets uppbyggnad följer här några definitioner och förklaringar av de lärandeteorier som materialet grundar sig i. Till att börja med definieras *lärande* ur ett *deltagande*-perspektiv. Att utöva matematik är att delta i den *kommunikation* som är specifik för ämnet matematik. Vi kallar det för deltagande i den matematiska *diskursen* (Sfard, 2007). Att lära sig matematik är att bli introducerad för denna diskurs. Lärandet utgör målet med undervisningen.

En *rutin* är ett mönster som uppstår genom repetition av en procedur i en viss situation. Ordet rutin känns igen från vardagen och innebär i stort sett samma sak i det här sammanhanget. Rutinen är en uppgift som ska utföras i kombination med den procedur som används för att utföra uppgiften. En procedur kan bestå av flera delsteg (Lavie et al., 2019).

Exempel:

- *Du ska hälsa på din kollega (uppgiften). Du tolkar situationen baserat på tidigare erfarenheter och väljer hur du ska genomföra detta. Du vinkar till kollegan, ler och säger hej (proceduren).*
- *Du ska utföra multiplikationen 4×3 (uppgiften). Du tolkar situationen baserat på tidigare erfarenheter och väljer hur du ska genomföra detta. Du beräknar summan 4+4+4 (proceduren).*

Rutinen kan i sin tur vara processorienterad eller målorienterad. En processorienterad rutin kallar vi *ritual*. Elevens fokus vid utförande av en ritual är själva proceduren som används för att lösa uppgiften. En målorienterad rutin sägs vara *utforskande*. Elevens fokus i det här fallet blir att nå ett svar (komma fram till ett resultat). När man lär sig matematik implementeras oftast ritualerna först, och sedan kan en avritualisering (eng. de-ritualization) gradvis ske mot helt och hållet utforskande rutiner. Avritualiseringen sker gradvis och rutiner kan därmed vara ett mellanting av ritual och utforskande (Lavie et al., 2019).

Vidare följer några indikationer som visar på en avritualisering. Målet med undervisningen är att eleverna ska kunna använda rutiner utforskande och därmed kunna delta i den matematiska diskursen. Observera dock att ritualer också är viktiga för elevens lärande och att värdet av dessa inte är försumbart.

OLIKA STEG: ATT GÅ FRÅN RITUAL TILL UTFORSKANDE

Lavie et al. (2019) beskriver sex typer av avritualiseringssteg som observerats vid studier av lärandesituationer, vilka används för att definiera på vilka sätt elever kan gå mot utforskande.

- **Flexibilitet (eng. Flexibility)** *En ökande flexibilitet hos en rutin innebär att det finns fler än ett sätt att utföra samma uppgift.*
  Eleven tar ett steg mot utforskande när eleven inser att det finns ytterligare procedurer som kan användas för att utföra samma uppgift. Eleven kan då använda flera procedurer för att lösa uppgiften

- **Sammankoppling (eng. Bondedness)** *En sammankopplad rutin innebär att resultatet av ett delsteg i proceduren är input till ett senare delsteg. Alla steg i proceduren ska vara sammankopplade.*
  Till en början kan eleven utföra några eller alla delsteg men vara omedveten om relationen mellan delstegen. Eleven tar ett steg mot utforskande när denne blir medveten om relationen mellan de olika delstegen, de vill säga att eleven sammankopplar delstegen.

- **Tillämplighet (eng. Applicability)** *En tillämpbar rutin är en rutin som är användbar i flera olika typer av uppgifter, i nya sammanhang.*
  En ritual har låg tillämplighet eftersom bara väldigt små detaljer får vara ändrade i uppgiften för att proceduren ska kunna användas igen. En målorienterad rutin är mer trolig att kunna användas igen då den fokuserar på resultatet och inte är lika begränsad av att uppgiften ska vara återskapad precist. En avritualisering av rutinerna sker när eleven kan tillämpa en rutin i ett nytt sammanhang, som skiljer sig från tidigare situationer där rutinen varit användbar.

- **Elevens agentskap (eng. Performer's agentivity)** *Att ta egna beslut om vilket delsteg som ska utföras och när det ska utföras, i en viss typ av uppgift.*
  När eleven utför ritualer har denne inte någon frihet att ta egna beslut. Eleven går mot utforskande när eleven på egen hand kan se hur proceduren till uppgiften ska utföras, utan instruktioner.

- **Objektifiering (eng. Objectification)** *Att ersätta konkreta föremål med abstrakta matematiska objekt.*
  När ett konkret föremål används för att lösa en uppgift så utförs proceduren på det konkreta föremålet. Eleverna går mot utforskande när de konkreta föremålen ersätts av abstrakta objekt, vilka procedurerna då istället utförs på. Ett exempel är att till en början förklarar en elev att addition utförs med hjälp av att eleven räknar hur många klossar (konkret föremål) det finns sammanlagt, men går till att addition utförs med heltal (abstrakta objekt).

- **Underbyggnad (eng. Substantiability)** *Elevens förmåga att kunna förklara och utvärdera sin lösning.*
  Motiveringen till lösningen är processorienterad om eleven förklarar lösningen genom att delge stegen i proceduren, vilket tyder på att uppgiftens löstes genom ritualer. Eleven går mot utforskande när motiveringen är resultatorienterad. Till exempel kan lösningen till en ekvation motiveras med att varje steg i proceduren är genomfört (processorienterad) eller med att stoppa in svaret i ekvationen och se att den är korrekt (resultatorienterad).

REFERENSER

Lavie, I., Sfard, A., & Steiner, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics 101*, 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Tack till

Flertalet personer har deltagit i utvecklingen av detta material, därför vill vi här säga ett tack till er.

Cecilia Kozma, Handledare
Lisa Österling, Handledare
Personer i KUL-F-projektet
Alla deltagande lärare och lärarstudenter som ställt upp!