

# Intromatte för optikerstudenter

# Bråkräkning

## Vad är ett bråk?

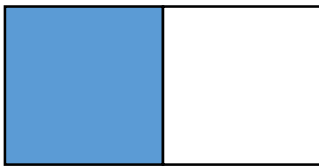
Ett tal i bråkform anger hur stor en andel är. Det är egentligen en division mellan två tal, fast man inte räknar ut kvoten.

$\frac{2}{3}$  är ett tal i bråkform. Talet ovanför bråkstrecket kallas **täljare** (täljare börjar på "t" som i "tak") och talet under bråkstrecket kallas **nämnare** (nämnare börjar på "n" som i "nere").

Nämnaren anger hur många delar helheten är uppdelad i.

Täljaren anger hur många av delarna man har.

## Exempel: Hur stor andel av rektangeln är färgad?



1 av 2 delar är färgade.  $\frac{1}{2}$  är färgad.

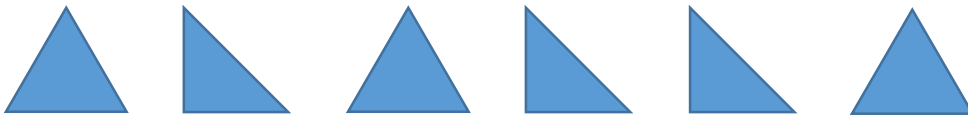
## Exempel: Hur stor andel av cirkelarna är svarta?



2 av 5 cirklar är svarta.  $\frac{2}{5}$  är svarta.

## Uppgifter

1. Hur stor andel av trianglarna är rätvinkliga?



## Förkortning och förlängning

Då man vill skriva ett bråk i sin enklaste form kan man **förkorta** bråket. Det gör man genom att dividera både täljare och nämnare med samma tal. Förkortning ändrar inte på bråkets värde utan görs för att kunna räkna på bråket.

**Exempel: Förkorta  $\frac{15}{24}$  med 3.**

$$\frac{15}{24} = \frac{15/3}{24/3} = \frac{5}{8}$$

**Exempel: Bestäm i dess enklaste form bråket  $\frac{28}{42}$ .**

$$\frac{28}{42} = \frac{28/7}{42/7} = \frac{4}{6} = \frac{4/2}{6/2} = \frac{2}{3}$$

Motsatsen till förkortning är **förlängning** och det gör man genom att multiplicera både täljare och nämnare med samma tal. Förlängning ändrar inte på bråkets värde utan görs för att kunna räkna på bråket. Vi kommer lite längre fram i detta avsnitt titta på hur man gör.

**Exempel. Förläng  $\frac{3}{5}$  med 4.**

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$$

**Exempel: Förläng  $\frac{4}{9}$  så att nämnaren blir 27.**

Förlänger med 3.

$$\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{12}{27}$$

### Uppgifter

2. Förkorta  $\frac{18}{42}$  med 6.
3. Förläng  $\frac{3}{5}$  så att nämnaren blir 30.
4. Förläng  $\frac{1}{6}$  så att nämnaren blir 60.
5. Bestäm i dess enklaste form bråket  $\frac{42}{60}$ .
6. Bestäm vilket tal som ska stå istället för X.

a.  $\frac{1}{3} = \frac{X}{6}$

b.  $\frac{3}{4} = \frac{9}{X}$

c.  $\frac{3}{7} = \frac{12}{X}$

### Addition och subtraktion av bråk

Vid addition och subtraktion av bråktal är det viktigt att båda bråken har samma nämnare.

För att få en gemensam nämnare kan man förlänga bråken med det andra bråkets nämnare.

**Exempel: Beräkna  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  och skriv i enklaste form.**

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

**Exempel: Beräkna  $\frac{4}{10} + \frac{3}{4}$  och skriv i enklaste form.**

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{4} = \frac{4/2}{10/2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{8}{20} + \frac{15}{20} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20}$$

## Uppgifter

Beräkna och förenkla bråken nedan utan miniräknare.

7.  $\frac{7}{3} + \frac{5}{2}$

8.  $\frac{5}{3} + \frac{12}{16}$

9.  $\frac{12}{9} + \frac{25}{30}$

10.  $\frac{1}{4} - (-\frac{8}{9})$

11.  $-\frac{12}{33} + \frac{4}{22}$

## Multiplikation och division av bråk

Vid multiplikation av bråk multipliceras täljare med täljare och nämnare med nämnare.

**Exempel: Beräkna  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$**

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

**Exempel: Beräkna  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$  och skriv i enklaste form.**

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 1}{8 \cdot 3} = \frac{2}{24} = \frac{2/2}{24/2} = \frac{1}{12}$$

Vid division av två bråk använder man sig av **invertering**. Det är samma sak som att multiplicera ett bråk med ett annat vars täljare och nämnare bytt plats.

**Exempel: Beräkna  $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{5}}$**

$$\frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{1} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 1} = \frac{20}{9}$$

**Exempel: Beräkna  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$  och skriv i enklaste form.**

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{10/2}{12/2} = \frac{5}{6}$$

### Uppgifter

Beräkna och förenkla bråken nedan utan att använda miniräknare.

12.  $\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3}$

13.  $\frac{2}{11} \cdot \frac{9}{3}$

14.  $\frac{\frac{8}{21}}{\frac{4}{7}}$

15.  $\frac{\frac{5}{3}}{9}$

16.  $\frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{8}}{\frac{6}{9} + \frac{7}{3}}$

# Algebra

## Ekvationer

En **ekvation** är ett sätt att med hjälp av symboler visa att två uttryck är lika. De två uttrycken kalas led och skiljs åt med likhetstecken.

**Exempel:**  $3x + 2 = 0$

**Vänsterledet (VL)** i ovanstående ekvation är  $3x + 2$  och **högerledet (HL)** är 0.

Symbolerna kallas **variabler** och representerar en siffra.

Ofta vill man veta värdet på en variabel. Det får man genom att ändra i ekvationen så att variabeln står ensam på ena sidan om likhetstecknet.

Det kallas att "**lösa ut**" variabeln. Följande metod används för att lösa ut en variabel i en ekvation:

1. Gör **alltid samma sak på båda sidor** om likhetstecknet.
  - a. Flytta över konstanter genom addition och subtraktion för att få variabeln ensam.

Exempel 1:  $x - 4 = 0$

$$x - 4 + 4 = 0 + 4$$

$$x = 4$$

Exempel 2:  $y + 7 = 5$

$$y + 7 - 7 = 5 - 7$$

$$y = -2$$

- b. Division och multiplikation för att få variabeln ensam.

Exempel 1:

$$4x = 4$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{4}{4}$$

$$x = 1$$

Exempel 2:

$$\frac{x}{7} = 5$$

$$\frac{x}{7} \cdot 7 = 5 \cdot 7$$

$$x = 35$$

c. Dra roten ur.

Exempel:  $x^2 = 4$

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

2. Testa att din lösning stämmer, VL=HL.

**Exempel: Lös ut x ur ekvationerna nedan.**

a.  $2x + 10 = 0$

Subtrahera 10 på båda sidor:

$$2x + 10 - 10 = 0 - 10$$

$$2x = -10$$

Dividera med 2:

$$\frac{2x}{2} = -\frac{10}{2}$$

$$x = -5$$

Testar lösningen:

$$VL = 2x + 10 = 2 \cdot (-5) + 10 = -10 + 10 = 0 = HL$$

b.  $y^2 + x^2 = 36$

Subtrahera  $y^2$  på båda sidor:

$$y^2 + x^2 - y^2 = 36 - y^2$$

$$x^2 = 36 - y^2$$

Dra roten ur på båda sidor:

$$x = \pm\sqrt{36 - y^2}$$

Testar lösningen:

$$VL = y^2 + x^2 = y^2 + \left(\pm\sqrt{36 - y^2}\right)^2 = y^2 + 36 - y^2 = 36 = HL$$

## Uppgifter

Lös ut x ur ekvationerna nedan.

17.  $3x + 6 = 0$

18.  $6(2x + 7) = \frac{24}{2}$

19.  $y = 5x + 20$

20.  $y^2 + x^2 = 25$

21.  $\frac{(5-3)/7}{2/(3x-1)} = 5$

## Att ställa upp och lösa ekvationer

Ibland behöver man gå från ord till uttryck och tvärtom. Följande metod används för att ställa upp ekvationer:

1. Läs texten noga.
2. Identifiera vad som är **sökt** i texten.
3. Identifiera vad som är **givet** i texten.
4. Ställ upp en ekvation!

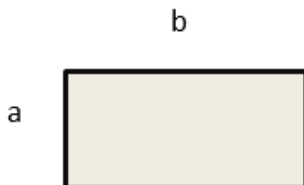
**Exempel: Folkmängden i en stad ökar med 200 personer per år. Med hur många personer har folkmängden ökat på x år?**

Sökt: Folkmängden (F) efter x år

Givet: Ökning med 200 pers/år

Ekvation:  $F = 200 \cdot x$

**Exempel:** En rektangulär kaninhage på  $50 \text{ m}^2$  ska byggas av kompostgaller. Gallret kostar  $50 \text{ kr/m}$ . Sätt upp en ekvation för stängslets pris som funktion av kortaste sidans längd.



Sökt: Pris ( $P$ ) som funktion av sidan kortsidan  $a$

Givet:

- $\text{Arean} = ab = 50 \text{ m}^2$
- $\text{Omkretsen} = a+a+b+b \text{ m} = 2a+2b \text{ m}$
- $P = 50[\text{kr/m}] \cdot \text{omkrets}[\text{m}] = 50[\text{kr/m}] \cdot (2a + 2b)[\text{m}]$

Ekvation: Vi vill ha ett uttryck för stängslets pris som funktion av kortaste sidans längd! Använder uttrycket för arean för att ersätta sidan  $b$ .

$$ab = 50[\text{m}^2]$$

$$b = \frac{50}{a}[\text{m}]$$

$$P = 50[\text{kr/m}] \cdot (2a + 2b)[\text{m}]$$

Ersätter  $b$  med  $\frac{50}{a}$ :

$$P = 50 \left( 2a + 2 \cdot \frac{50}{a} \right) = 100 \cdot a + \frac{5000}{a}$$

### Uppgifter

22. En rektangulär hage med en area på  $40 \text{ m}^2$  skall stängslas in. Stängslet kostar  $10 \text{ kr/meter}$ . Sätt upp en ekvation för stängslets pris som en funktion av kortaste sidans längd.

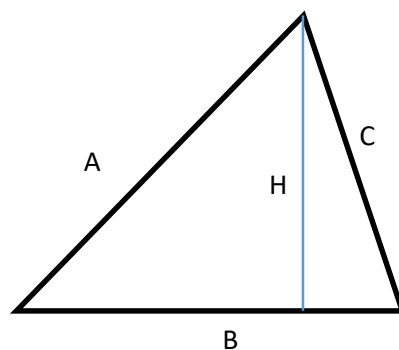
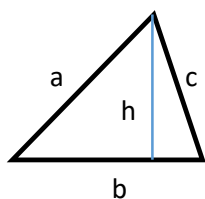
23. Av 40 elever i en klass är det hälften av pojkarna och en tredjedel av flickorna som kommer i tid till lektionen. Totalt är det tre åttondelar som kommer i tid.
- Sätt upp en ekvation som beskriver problemet, där  $x$  är antalet pojkarna.
  - Hur många pojkarna finns i klassen?

## Geometri – likformiga trianglar

### Vad betyder likformighet?

Två trianglar med samma form men olika storlek kallas **likformiga**. Vinkelsumman i en triangel, alltså alla tre vinklar tillsammans, är  $180^\circ$ . För likformiga trianglar gäller följande:

- Förhållandet mellan två motsvarande sidor är samma,  $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$ .
- Motsvarande vinklar är lika stora.
- Förhållandet mellan sidorna inom triangeln är samma,  $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ .
- Förhållandet mellan basen och höjden är samma,  $\frac{h}{b} = \frac{H}{B}$ .



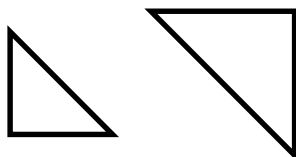
### Exempel: Är triangelarna likformiga?

a)

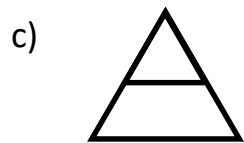


Nej, triangelarna har olika form.

b)

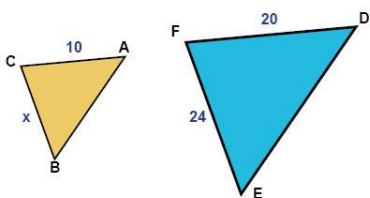


Ja, vinklarna är samma och sidorna parallella.



Ja, gemensamma och parallella sidor.

**Exempel: Beräkna längden på sidan x. Trianglarna är likformiga.**



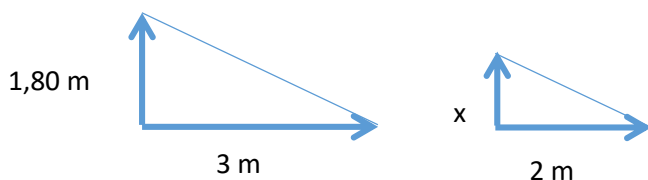
Förhållandet mellan de motsvarande sidorna är samma:  $\frac{x}{24} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

Löser ut x genom att multiplicera med 24:

$$x = \frac{24}{2} = 12 \text{ längdenheter}$$

**Exempel: En pappa och hans dotter står på plan mark och tittar på sina skuggor. Pappan som är 1,80 m lång har en 3 m lång skugga och dotterns skugga är 2 m lång. Hur lång är dottern?**

Illustrerar problemet med hjälp av två liksidiga trianglar.



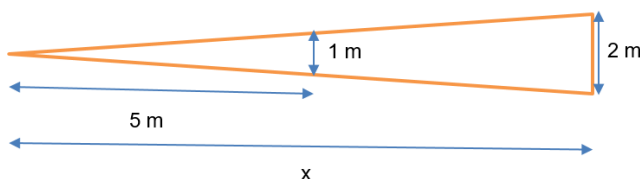
Förhållandet mellan de motsvarande sidorna är samma:  $\frac{x}{1,8} = \frac{2}{3}$

Löser ut x genom att multiplicera med 1,8:  $x = \frac{3,6}{3} = 1,2 \text{ m}$

Dottern är alltså 1,2 m lång.

**Exempel: En 1 m lång pinne belyses av en spotlight med en smal ljuskon. När den är 5 m ifrån ljuskällan blir pinnen precis helt belyst. Hur nära källan kan en 2 m lång pinne vara och bli helt belyst?**

Illustrerar problemet på följande vis:

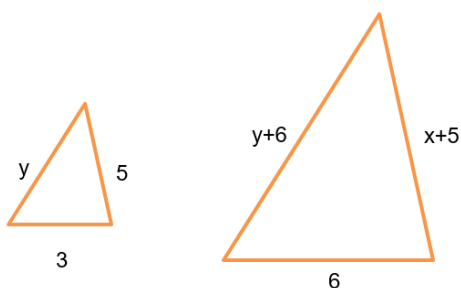


Förhållandet mellan samma sidor i de båda trianglarna är samma:

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{1} \rightarrow x = 10 \text{ m}$$

Avståndet som krävs är alltså 10 m för att lysa upp den 2 m långa pinnen.

**Exempel: Beräkna sträckorna x och y.**



Börjar med x.

Förhållandet mellan de motsvarande sidorna är samma:  $\frac{x+5}{5} = \frac{6}{3} = 2$

Löser ut x:  $x + 5 = 10 \rightarrow x = 10 - 5 = 5$  längdenheter

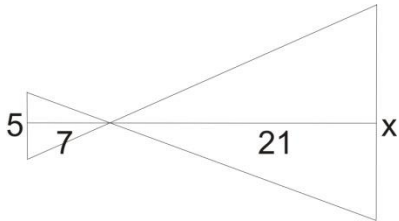
Fortsätter med y.

Förhållandet mellan de motsvarande sidorna är samma:  $\frac{y+6}{y} = \frac{6}{3} = 2$

Löser ut y:  $y + 6 = 2y \rightarrow y = 6$  längdenheter

## Uppgifter

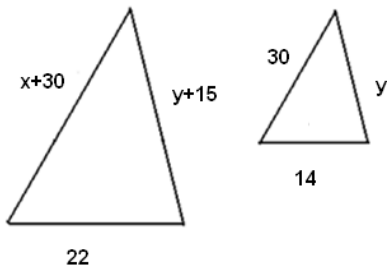
24. Beräkna höjden  $x$  i figuren nedan.



25. En triangel med basen 4 cm och höjden 6 cm är likformig med en triangel med höjden 30 cm. Vad är den andra triangelns bas? Rita figur!

26. Skuggan av en flaggstång på den horisontella marken är 17,2 m lång, samtidigt som en meterlång käpp kastar en skugga som är 1,23 m. Hur hög är flaggstången?

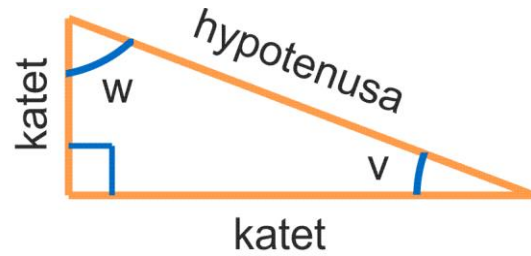
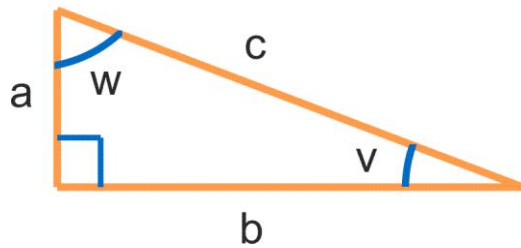
27. Beräkna sträckorna  $x$  och  $y$  (cm).



## Trigonometri

### Vad är trigonometri?

Trigonometri beskriver sambanden mellan vinklar och sidor i en triangel. Vi kommer bara att jobba med **rätvinkliga** trianglar:



Sidorna a och b kallas **kateter**.

Sidan c är **hypotenusan**.

v och w är vinklar.

## Trigonometriska funktioner

I en rätvinklig triangel gäller för den godtyckliga vinkeln v:

$$\sin(v) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\cos(v) = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$$

$$\tan(v) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

**Exempel: Bestäm sin, cos och tan för vinkeln v i triangeln ovan.**

$$\sin(v) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(v) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(v) = \frac{a}{b}$$

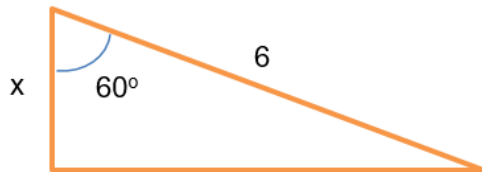
**Exempel: Bestäm sin, cos och tan för vinkeln w i triangeln ovan.**

$$\sin(w) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(w) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(w) = \frac{b}{a}$$

**Exempel: Beräkna x.**



Vi har en vinkel, närliggande katet och hypotenusan givna. Vi använder **cosinus**.

$$\cos(60^\circ) = \frac{x}{6}$$

$$x = 6 \cdot \cos(60^\circ) = 3$$

(Om du får svaret -5.71 har du räknaren inställd på radianer och inte grader! Se till att ha miniräknaren inställd på grader.)

## Uppgifter

28. Beräkna hypotenusans längd i en rätvinklig triangel med vinkeln 60° och närliggande katet 4 cm.
29. Beräkna motstående katets längd i en rätvinklig triangel med en 10 cm hypotenusan och vinkel 45°.

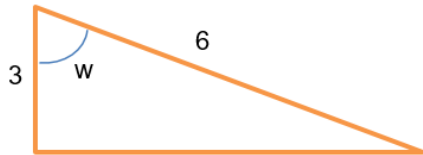
## Räkna ut vinklar

Nu kan vi räkna ut sidorna i en triangel med hjälp av cosinus, sinus och tangens. Men hur gör vi för att räkna ut en vinkel?

Vi använder oss av funktionerna arcsin, arccos och arctan på miniräknaren (betecknas ibland  $\sin^{-1}$ ,  $\cos^{-1}$ ,  $\tan^{-1}$ ).

Innan vi räknar ut vinkeln måste vi se till att vår miniräknare är inställd på **grader** och inte radianer!

**Exempel: Beräkna vinkeln  $w$ .**



Vi har en vinkel, närliggande katet och hypotenusan givna. Vi använder **cosinus**.

$$\cos(w) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Slår  $\arccos(0.5)$  på miniräknaren för att få vinkeln:

$$w = \arccos(0.5) = 60^\circ$$

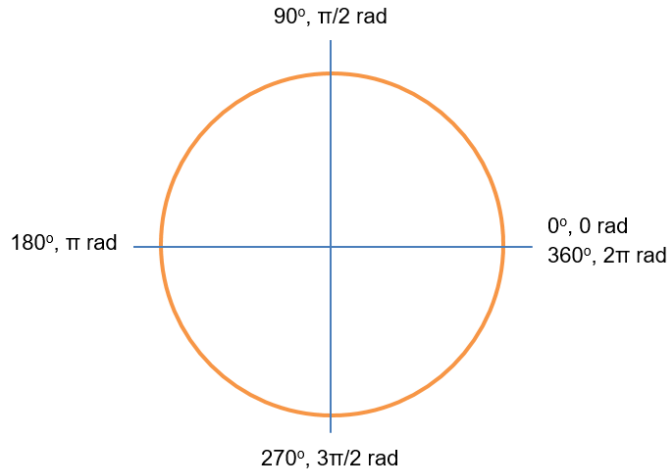
### Uppgifter

30. Beräkna vinkeln i en rätvinklig triangel med närliggande katet 5 cm och motstående katet 4 cm.
31. Beräkna vinkeln i en rätvinklig triangel med hypotenusan 8 cm och närliggande katet 5 cm.

### Grader och radianer

Vinklar kan mätas på olika sätt. De två vanligaste är **grader** och **radianer**. Det är viktigt att kunna omvandla mellan dessa två. Vi tar hjälp av cirkeln nedan för att illustrera omvandlingen. Ett helt varv i cirkeln är  $360^\circ$ , det motsvarar  $2\pi$  radianer. Ett halvt varv i cirkeln är  $180^\circ$ , det motsvarar  $\pi$  radianer.

Ett annat mått på vinklar som används framförallt när de är små, som t.ex. för definitionen av Visus är **bågminuter**. Bågminuter betecknas med ' och  $1' = (1/60)^\circ$ . Alltså är  $2' = (2/60)^\circ$ ,  $3' = (3/60)^\circ$  och  $1^\circ = 60'$ ,  $2^\circ = 2 \cdot 60'$ ,  $3^\circ = 3 \cdot 60'$  osv.



$$\text{Vinkeln i grader} = \text{vinkeln i radianer} \cdot \frac{180}{\pi}$$

## Uppgifter

32. Uttryck följande vinklar i radianer:

a) 1°, b) 45°, c) 180°, d) 6°.

33. Uttryck följande vinklar (givna i radianer) i grader:

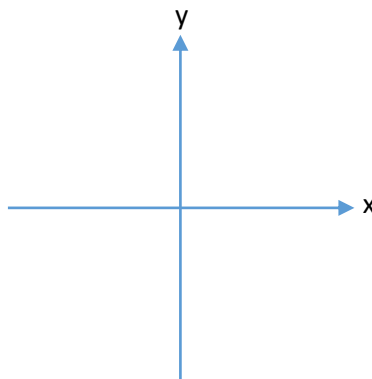
a) 1, b)  $2\pi/3$ , c) 0.15, d)  $-3\pi/2$ .

## Enhetscirkeln

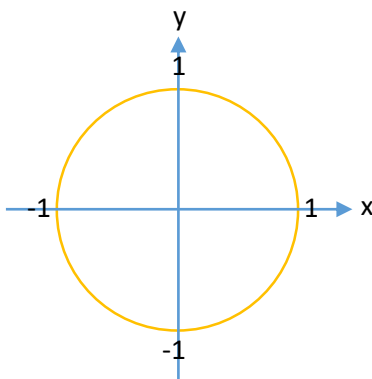
Enhetscirkeln är ett hjälpmedel för att lättare förstå sinus och cosinus. Med enhetscirkeln kan man bestämma värden på sinus och cosinus utan att använda miniräknare.

Följande steg beskriver hur man ritat enhetscirkeln:

1) Rita ett koordinatsystem, dvs en x- och en y-axel.



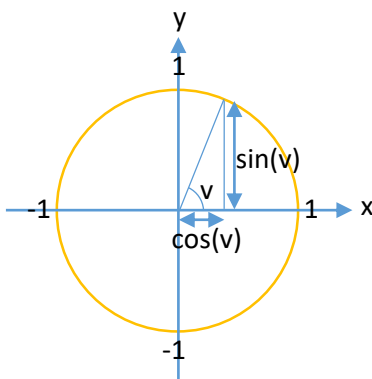
2) Rita ut en cirkel med radien 1, med mittpunkt i origo (0,0).



3) Rita ut vinkeln du är intresserad av genom att börja längst till höger. Punkten där linjen skär cirkeln anger cosinus- och sinusvärdena för vinkeln.

x koordinaten = (bredden) =  $\cos(v)$

y koordinaten = (höjden) =  $\sin(v)$



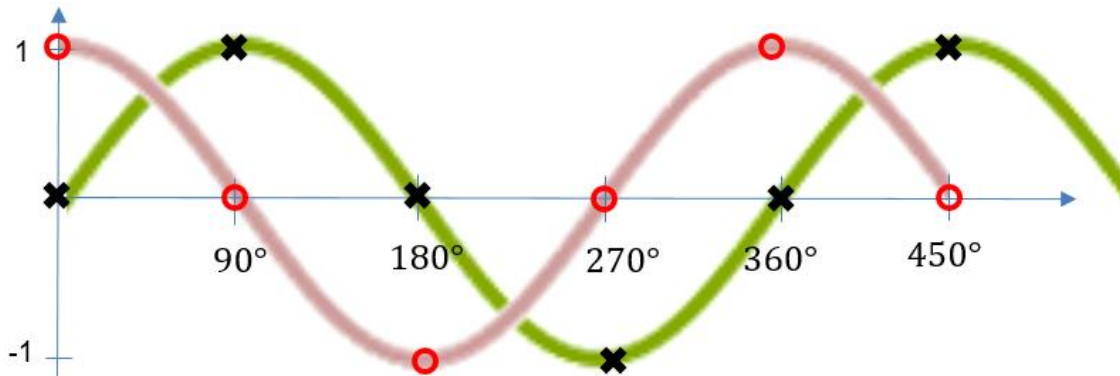
**Exempel: Ange cosinus och sinus för vinklarna.**

$$v = 0^\circ \quad \cos(0^\circ) = 1 \quad \sin(0^\circ) = 0$$

$$v = 90^\circ \quad \cos(90^\circ) = 0 \quad \sin(90^\circ) = 1$$

$$v = 270^\circ \quad \cos(270^\circ) = 0 \quad \sin(270^\circ) = -1$$

Sinus och cosinus är alltid mellan -1 och 1. Efter ett helt varv i enhetscirkeln upprepar de sig. Detta kallas **periodicitet**. Hur sinus och cosinus varierar mellan -1 och 1 för olika vinklar ser vi nedan. Kan du lista ut vilken av funktionerna som är sinus och vilken som är cosinus? Hint: vad är värdena för  $\cos(0^\circ)$  och  $\sin(0^\circ)$ ?



### Uppgifter

34. Bestäm utan miniräknare. Vinklarna är angivna i radianer.

- a.  $\sin(0)$
- b.  $\sin(\pi/2)$
- c.  $\sin(\pi)$
- d.  $\sin(3\pi/2)$
- e.  $\cos(0)$
- f.  $\cos(\pi/2)$
- g.  $\cos(\pi)$
- h.  $\cos(3\pi/2)$
- i.  $\sin(2\pi)$
- j.  $\cos(2\pi)$

## Blandade uppgifter

Beräkna och förenkla bråken nedan utan miniräknare.

35.  $\frac{6}{5} - \frac{2}{3}$

36.  $\frac{2}{3} + \frac{-2}{9}$

37.  $\frac{5/3}{9}$

38.  $\frac{11}{22} \cdot \frac{24}{64}$

39.  $\frac{6}{5} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right)$

40.  $\frac{14}{27} \cdot \frac{-9}{28}$

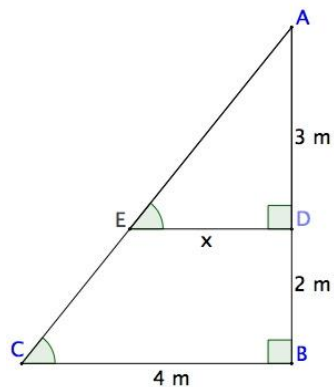
Lös ut x ur de två ekvationerna nedan.

41.  $3k(x^2 + 2) = 4y$

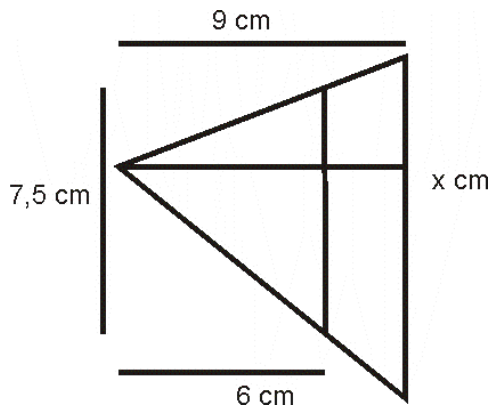
42.  $\frac{5+y}{2+x} = \frac{6y}{1+x}$

43. En 3 m lång bil får precis plats inom en persons synfält om den står 2 m bort.  
Hur nära kan en 9 m lång lastbil stå och ändå få plats inom synfältet?

44. Beräkna sträckan x.



45. Beräkna sträckan x.



46. Beräkna arean av en rätvinklig triangel med vinkeln  $20^\circ$  och motstående katet 10 cm.

47. Beräkna omkretsen av en rätvinklig triangel med vinkeln  $30^\circ$  och närliggande katet 6 cm.

48. En rätvinklig triangel har en vinkel  $\theta$  så att  $\sin \theta = \frac{4}{5}$ .  
Beräkna a)  $\cos \theta$  och b)  $\tan \theta$ , utan att använda miniräknare.

49. Om en sida i en triangel förlängs åt båda hållen uppkommer två yttervinklar, som är  $120^\circ$  respektive  $70^\circ$ . Bestäm triangelns vinklar!