Inledning.

Definition. Derivatan av ett polynom

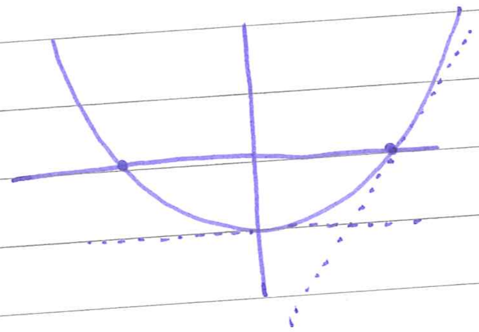
$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ är

polynomet $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$.

Låt f vara ett polynom med reella koefficienter.

Några geometriska observationer:

(1) Derivatans värde i en punkt anger funktionens lutning i punkten.



(2) Derivatan har en rot i varje lokal extrempunkt.

(3) Mellan två olika rötter till f ligger en lokal extrempunkt.

Sats (Rolles Sats).

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $f(x_1) = f(x_2) = 0$ för $x_1 \neq x_2$, så finns det ett tal $\xi \in (x_1, x_2)$ med $f'(\xi) = 0$.

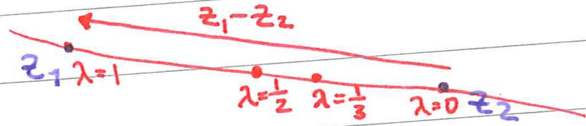
Speciellt: Mellan rötterna av ett polynom ligger rötter av polynomets derivata.

Frågor: (1) Vad händer för komplexa polynom?
(2) Vad betyder 'mellan punkter' i det komplexa planet?

Konvexa mängder

Def. En mängd $K \subseteq \mathbb{C}$ är konvex om för varje $z_1, z_2 \in K$ och varje $\lambda \in [0,1]$, även gäller att $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in K$.

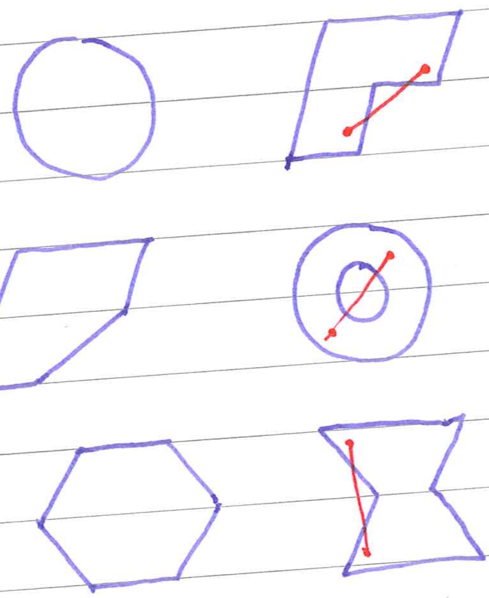
Geometriskt:



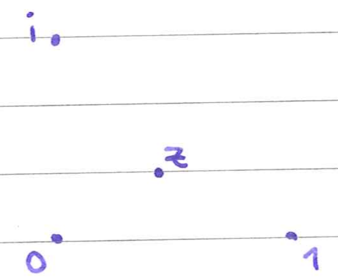
$$\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = z_2 + \lambda (z_1 - z_2)$$

K är konvex om K innehåller hela linjesegmentet mellan z_1 och z_2 för alla $z_1, z_2 \in K$.

Exempel.



Exempel. Antag att K är konvex och $0, 1, i \in K$.



Är $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i \in K$?

Notera: $z = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot i + \frac{1}{6}\cdot 0$.

<u>Def</u> Låt $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. En summa på formen

$$a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$$

där $a_1, \dots, a_n \geq 0$ och $a_1 + \dots + a_n = 1$ kallas <u>konvexkombination</u> av punkterna $z_1, \dots, z_n$.

<u>Sats</u> En mängd K är konvex om och endast om K innehåller alla konvexkombinationer av punkter i K.

Bevis. K innehåller alla konvexkombinationer

$\Rightarrow$ K innehåller alla punkter $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$ för $z_1, z_2 \in K$

$\Rightarrow$ K är konvex.

Antag att K är konvex. Vill visa att K innehåller alla konvexkombinationer av punkter i K. Induktion över antalet punkter i kombinationen.

Basfall: två punkter. $a_1 z_1 + a_2 z_2 = a_1 z_1 + (1-a_1) z_2 \in K$.

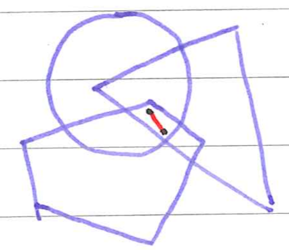
Induktionssteg. Antag att K innehåller alla konvexkombinationer av n punkter i K.
Låt $z_1, \dots, z_{n+1} \in K$ och $z = a_1 z_1 + \dots + a_{n+1} z_{n+1}$, $a_i \geq 0$, $a_1 + \dots + a_m = 1$.

Sätt $\lambda = a_1 + \dots + a_n = 1 - a_{n+1}$.
$\lambda = 0 \Rightarrow z = z_{n+1} \in K$.
$\lambda \neq 0 \Rightarrow$ sätt $\tilde{z} = \frac{1}{\lambda}(a_1 z_1 + \dots + a_n z_n)$,
enligt induktion är $\tilde{z} \in K$.
$\Rightarrow z = \lambda \cdot \tilde{z} + (1-\lambda) \cdot z_{n+1}$,
då K konvex är $z \in K$. $\square$

Fråga: Vad är mängden av alla punkter mellan $z_1, \dots, z_n$?

<u>Det konvexa höljet</u>

Hjälpsats. Snittet av flera konvexa mängder är konvex.



<u>Def</u>. Det <u>konvexa höljet</u> av punkter $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ är mängden av alla konvexkombinationer av $z_1, \dots, z_n$ och skrivs som <u>$\mathrm{conv}(z_1, \dots, z_n)$</u>.

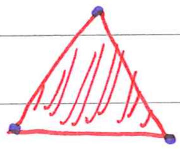
<u>Sats</u> $\mathrm{conv}(z_1, \dots, z_n)$ är en konvex mängd.

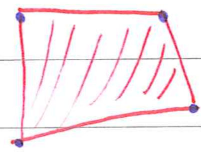
Följdsats $\operatorname{conv}(z_1, \dots, z_n)$ är snittet av alla konvexa mängder som innehåller $z_1, \dots, z_n$.

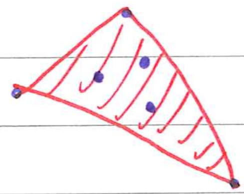
Bevis. $\operatorname{conv}(z_1, \dots, z_n)$ är innehållen i varje konvex mängd som innehåller $z_1, \dots, z_n$.
$\operatorname{conv}(z_1, \dots, z_n)$ är konvex själv och innehåller snittet.

Exempel.

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

Gauss-Lucas sats

Sats Låt f vara ett icke-konstant polynom. Då ligger alla rötter till f' i det konvexa höljet av rötterna till f.

Hjälpsats. Om $z_1, \dots, z_n$ är rötterna till polynomet f och om $f(z) \neq 0$, så är

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n} .$$

Bevis av GLS.

Antag att $f'(z) = 0$.

Om $f(z) = 0$, så är $z = z_i$ för något $z_i \in \mathrm{conv}(z_1, \dots, z_n)$

Om $f(z) \neq 0$, följer:

$$0 = \frac{1}{z - z_1} + \dots + \frac{1}{z - z_n}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{z - z_1}{|z - z_1|^2} + \dots + \frac{z - z_n}{|z - z_n|^2}$$

Sätt $\alpha_i = \frac{1}{|z - z_i|^2} \geq 0$ och $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$$\Rightarrow \quad \alpha z = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n$$

Sätt $a_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}$.

$$\Rightarrow \quad z = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n \quad , \quad a_1, \dots, a_n \geq 0, \quad a_1 + \dots + a_n = 1$$

$\square$